Skript Mathematik

Analysis I: Ganzrationale Funktionen

Version: 13. Juni 2018

Roland Stewen

stewen.rvk@gmx.de

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Einführung

Mit Hilfe der Differenzial- und Integralrechnung (Analysis) können Funktionen untersucht werden. Die Differenzialrechnung untersucht die Änderung der Funktion und die Integralrechnung die Fläche unter eine Kurve.

Ende des 17. Jahrhunderts wurde unabhängig voneinander und auf verschiedenen Wegen die Differenzial- und Integralrechnung von Leibniz und Newton entdeckt. Der Formalismus wurde ständig weiterentwickelt bis zu seiner heutigen Form. Doch trotz der anfänglichen Schwierigkeiten war es möglich viele Probleme in der Mathematik, Physik, Wirtschaft und vielen anderen Bereichen zu lösen.

Einige Beispiele:

- Bestimmung des Ortes einer Rakete, wenn die Beschleunigung zu jedem Zeitpunkt bekannt ist.
- Satellitensystem (GPS).
- Bestimmung der Steigung (Änderungsrate) einer Funktion an jeder Stelle.
- Überprüfung der Keplerschen Gesetze.
- Bestimmung der Volumens, wenn die Umrandungsfunktion bekannt ist.
- Bestimmung von Mittelwerten einer Kurve.
- Bestimmung der Fläche unter einer Kurve
- Oftmals kennt man nur die Durchflussmenge zu jedem Zeitpunkt (Wasser in einem Fluss, Strom in einer Leitung ...). Dann möchte man aber auch die gesamte geflossene Menge berechnen.

Heutzutage wird die Analysis in vielen Bereichen genutzt: natürlich der Mathematik, Physik, Ingenieurswesen, Wirtschaft (Grenzkosten, Optimumsberechnung), Biologie ...

Die Differenzialrechnung wird hier durch drei Ansätze eingeführt:

1. Die Bestimmung der Momentangeschwindigkeit als Grenzwert der Durchschnittsgeschwindigkeit. Der Grenzwert ergibt sich durch die Wahl immer kleinerer Messabstände.

2. Die rechnerische Ermittlung der Tangente bei $f(x) = x^2$.

3. Grafisches Ableiten.

Am Ende der Einführung ...

1. sollten Sie die Bedeutung der Ableitung an einem Beispiel erklären können.

2. Die Steigung bei quadratischen Funktionen an beliebigen Stellen ausrechnen können.

Daran anschliesend werden Sie lernen, wie man Steigung von allen Polynomen[1] berechnet, Maxima und Minima (Extremstellen) und Wendepunkte (Übergang von der Links- in die Rechtskurve, oder umgekehrt) findet.

1.1 Die Geschwindigkeitsmessung

In diesem Abschnitt wird die Geschwindigkeitsmessung untersucht. Es wird die Durchschnittsgeschwindigkeit mit der Momentangeschwindigkeit verglichen.

Am Ende wird der Grenzwertsbegriff anschaulich angeführt.

1.1.1 Die Durchschnittsgeschwindigkeit

Sie fahren mit dem Auto von Dortmund nach Berlin. Die Entfernung beträgt ca. 500 km. Wenn Sie nun 6 Stunden für die Fahrt benötigen, beträgt Ihre Durchschnittsgeschwindigkeit ($\overline{v}$):

$$\overline{v} = \frac{500\,\mathrm{km}}{6\,\mathrm{h}} \approx 80\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$$

Natürlich sind Sie aber nicht die ganze Zeit 80 km/h gefahren. Sondern Sie sind mal schneller auf der Autobahn und mal langsamer im Stau oder im Stadtverkehr gewesen.

[1] Polynome sind Summen von Termen. Der Term kann einen Vorfaktor haben und die Variable hat nur ganzzahlige Potenzen. Beispiele für Polynome: $3x^2 + 2x + 4$ oder $z^5 - 2z$.

1.1.2 Die Momentangeschwindigkeit

Wie bestimmt man nun die Momentangeschwindigkeit?
Anwendungsbeispiel: Vor einer Schule soll eine Geschwindigkeitskontrolle stattfinden. Da die Eltern auch ihre Kinder aus dem Auto lassen, ist eine einfache Zeitmessung wie lange das Auto vom Beginn der Strasse bis zum Ende der Strasse benötigt nicht praktikabel. Denn dann erhalten Sie nur die Durchschnittsgeschwindigkeit.

Die Lösung des Problems ist, dass Sie die Durchschnittsgeschwindigkeit in einem kleinen Bereich messen. Es werden kleine Drähte gelegt, die einen Impuls geben, wenn Sie sie überfahren. Da der Abstand der Drähte bekannt ist, kann dann die Durchschnittsgeschwindigkeit des Autos zwischen diesen Drähten berechnet werden.

Aber im Prinzip ist auch das nur eine Durchschnittsgeschwindigkeit. Wenn Sie es also noch genauer haben wollen, dann müssen Sie die Drähte noch enger beieinander legen.

Wenn Ihnen dann die Genauigkeit immer noch nicht reicht, müssen Sie die Drähte noch enger beieinander legen...

Wir sehen ab von den technischen Problemen, also der tatsächlichen Möglichkeit der physikalischen Realisierbarkeit. Wir betrachten dies als reines Gedankenexperiment.

Das Problem (mathematische), welches auftritt ist, dass die Strecke (der Zähler) immer kleiner wird und die benötigte Zeit (Nenner) auch immer kleiner wird. Im Grenzwert ist die Länge der Zeit - also der Nenner - null und die Länge der Strecke - also der Zähler - ist im Grenzwert auch null:
Dann würde man ja null durch null teilen.

Wie wird das Problem gelöst?
Die Lösung besteht darin, dass man sich die Entwicklung der Zahlen anschaut:
Ein Beispiel[2] für viele verschiedene Messungen:

eingestellte Meßstrecke	gemessene Zeitdauer	errechnete Geschwindigkeit
1 m	0,236 s	4,2373 m/s
0,5 m	0,121 s	4,1322 m/s
0,25 m	0,0616 s	4,058 m/s
0,125 m	0,0310 s	4,0323 m/s
0,0625 m	0,0156 s	4,0156 m/s
0,03125 m	0,0078 s	4,0078 m/s

An der Tabelle ist zu erkennen, dass der Wert für die Geschwindigkeit sich den 4 m/s nähern. Diese 4 m/s sind der **Grenzwert** aller Messungen. In so einem Fall reicht es also nicht eine einzige Messung oder Rechnung durchzuführen, sondern

[2] In diesem Beispiel wird der Ort des Objekts in Abhängigkeit durch die Zeit gegeben durch: $s(t) = t^2 + 4t$. Wenn s der Ort zu einer gegebenen Zeit t ist, dann kann die benötigte Zeit für eine gefahrene positive Strecke berechnet werden durch: $t = -2 + \sqrt{s + 4}$ (Der positive Ast der Umkehrfunktion).

es müssen viele Rechnungen für die numerische Näherung duchgeführt werden, um den Grenzwert zu erkennen.

1.1.3 Steigungsdreieck

In diesem Abschnitt soll kurz an das Steigungsdreieck erinnert werden und die Begrifflichkeiten geklärt werden.

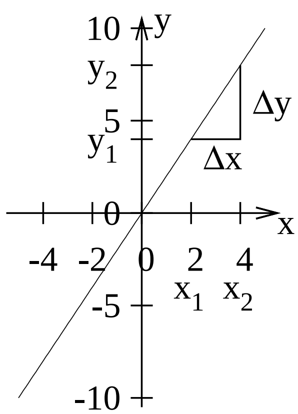


Abbildung 1.1: Eine Gerade und ein Steigungsdreieck. Die Seite nach oben heißt Δy und die Seite des Dreiecks parallel zur x-Achse heißt Δx.
Hier gilt $\Delta x = x_2 - x_1 = 4 - 2 = 2$
Und $\Delta y = y_2 - y_1 = 8 - 4 = 4$

Die Steigung berechnet sich aus dem Quotienten der beiden Seiten des Steigungsdreicks. Die Seite nach oben hat dann die Seitenlänge Δy und die Seitenlänge der Seite, die parallel zur x-Achse ist hat die Länge Δx (siehe Abb. 1.1).

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Die Seitenlängen Δx und Δy kann man berechnen als Differenzen der Endwerte:

$$\Delta x = x_2 - x_1$$
$$\Delta y = y_2 - y_1$$

(Das Delta: „Δ“ hat die Bedeutung der Differenz).

1.2 Ableitung einer quadratischen Funktion

Wenn ein Ball vom Turm fällt (siehe Abb. 1.2), dann beschleunigt der Ball. Zum Zeitpunkt des Loslassens ist die Geschwindigkeit des Balles null. Dann steigt die Geschwindigkeit immer mehr an. D. h., dass der Ball pro Sekunde immer mehr Weg zurück legt.

Die Funktion des freien Falles ist: $s(t) = \frac{1}{2}\,a\,t^2$, $s(t)$ gibt die Entfernung vom Loslassen in Abhängigkeit von der Zeit t an. a ist die jeweilige Beschleunigung der Erde oder eines Planeten. Auf der Erde berechnet man die zurückgelegte Entfernung mit der durchschnittlichen Erdbeschleunigung:

$$s(t)_{\mathrm{Erde}} = \frac{1}{2} \cdot 9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot t^2$$

Um nicht diese vielen Vorfaktoren zu haben untersuchen wir hier lieber den freien Fall auf dem Ganymed[3], denn da ist die Beschleunigung $1{,}66\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$ groß, so dass die Entfernung sich nun (extrem grob gerundet) ganz einfach durch die Normalparabel: $s(t) = t^2$ angeben lässt. Damit fällt uns das Rechnen etwas leichter und erschwert nicht das Verständnis.

[3]Der Ganymed ist der nicht nur der größte Mond des Jupiters, sondern auch der größte Mond im Sonnensystem überhaupt.

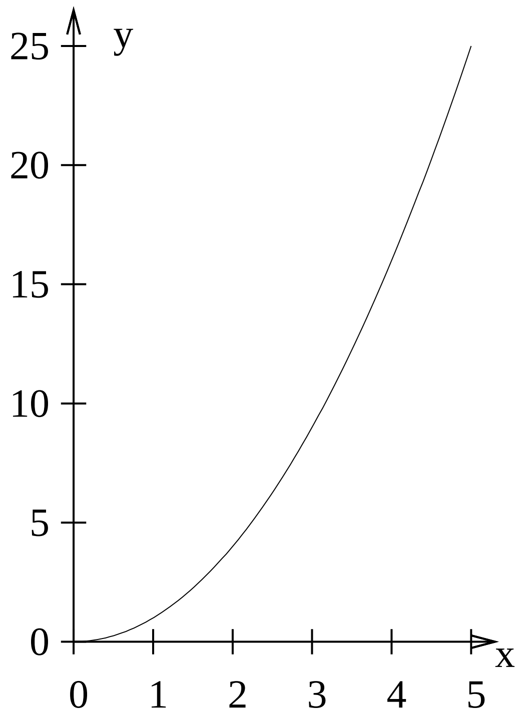


Abbildung 1.2: Die Normalparabel: $f(x) = x^2$.

1.2.1 Momentangeschwindigkeit nach 2 s

In Abb. 1.2 ist die Situation dargestellt. Der Ball wird bei 0 s losgelassen und fällt dann hinunter. Nach 2 s ist dann der Ball ca. $(2^2 = 4)$ 4 m weit gefallen. Nach 5 s ist dann der Ball ca. $(5^2 = 25)$ 25 m weit gefallen.

Lassen Sie sich nicht davon irritieren, dass der Graph nach oben zeigt, und der Ball nach unten fällt! Der Graph gibt halt nur die Entfernung vom Punkt des Loslassens an.

Es werden jetzt verschiedene Durchschnittsgeschwindigkeiten bestimmt, deren Messdauer immer kleiner wird. Zuerst erfolgen vier Bilder um das Prinzip zu visualisieren und dann eine Tabelle. Anschließend dann eine allgemeine Rechnung. Δy ist die zur y-Achse parallele Strecke des Steigungsdreiecks und Δx ist die zur x-Achse parallele Strecke des Steigungsdreiecks. $\Delta y = y_2 - y_1$ und $\Delta x = x_2 - x_1$. Die y-Werte errechnen sich durch das Einsetzen in die Funktion: $y = t^2$. Die Entfernung, also der y-Wert, nach 2 Sekunden beträgt dann: $y = 2^2\,\mathrm{m} = 4\,\mathrm{m}$.

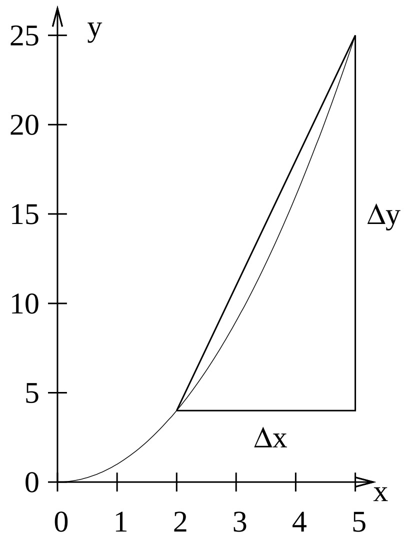


Abbildung 1.3: $\Delta x = 3$
$\overline{v} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{5^2\,\mathrm{m} - 2^2\,\mathrm{m}}{5\,\mathrm{s} - 2\,\mathrm{s}} = \frac{21\,\mathrm{m}}{3\,\mathrm{s}} = 7\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$

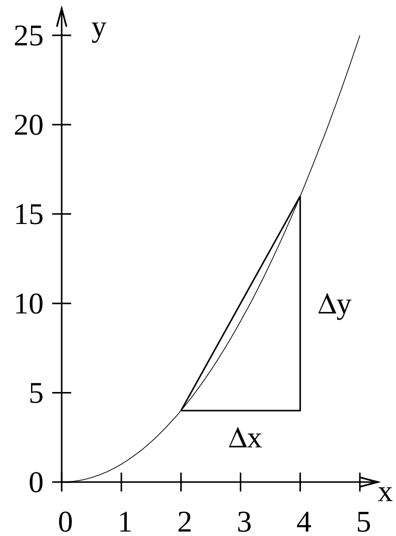


Abbildung 1.4: $\Delta x = 2$
$\overline{v} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{4^2\,\mathrm{m} - 2^2\,\mathrm{m}}{4\,\mathrm{s} - 2\,\mathrm{s}} = \frac{12\,\mathrm{m}}{2\,\mathrm{s}} = 6\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$

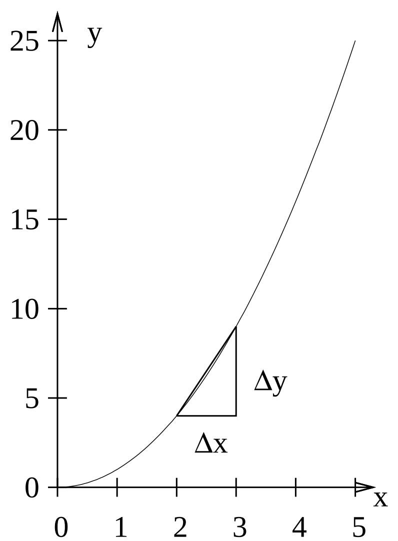


Abbildung 1.5: $\Delta x = 1$
$\overline{v} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{3^2\,\mathrm{m} - 2^2\,\mathrm{m}}{3\,\mathrm{s} - 2\,\mathrm{s}} = \frac{5\,\mathrm{m}}{1\,\mathrm{s}} = 5\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$

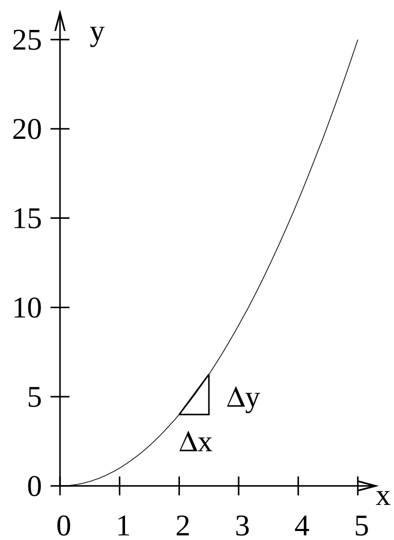


Abbildung 1.6: $\Delta x = 0{,}5$
$\overline{v} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2{,}5^2\,\mathrm{m} - 2^2\,\mathrm{m}}{2{,}5\,\mathrm{s} - 2\,\mathrm{s}} = \frac{2{,}25\,\mathrm{m}}{0{,}5\,\mathrm{s}} = 4{,}5\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$

In einer Tabelle sieht die Geschwindigkeitsberechnung bei $x = 2$ für $f(x) = x^2$ so aus:

f(2)	Δx	$2 + \Delta x$	$f(2 + \Delta x)$	Δy	$\Delta y/\Delta x$	$\overline{v}$
4	3	5	$5^2 = 25$	21	21/3	7
4	2	4	$4^2 = 16$	12	12/2	6
4	1	3	$3^2 = 9$	5	5/1	5
4	0,5	2,5	$2{,}5^2 = 6{,}25$	2,25	2,25/0,5	4,5
4	0,25	2,25	$2{,}25^2 = 5{,}0625$	1,0625	1,0625 / 0,25	4,25

Das Steigungsdreieck wird mit seiner Spitze an dem Punkt (2|4) angesetzt. Dann wird ein Δx vorgegeben. Anschließend wird Δy bestimmt. Z. B. bei dem Steigungsdreieck zwischen $x = 2$ und $x = 5$:

$\Delta y = f(5) - f(2) = 25 - 4 = 21.$

Nun soll die Rechnung zur Geschwindigkeitsbestimmung an der Stelle 2 mit einem beliebigen Δx gemacht werden. Dieses Δx wird der Einfachheit halber h genannt.

Im Anschluss kann man dann schauen, was passiert, wenn das Δx ganz klein wird. Als Variable wird es dann h genannt.
Die zu untersuchende Stelle der Funktion $f(x) = x^2$ ist bei $x = 2$.
$\overline{v}$ ist die Durchschnittsgeschwindigkeit über den betrachteten Zeitraum Δx.

f(2)	Δx	$2 + \Delta x$	$f(2 + \Delta x)$	$\Delta y = f(2{+}\Delta x){-}f(2)$	$\Delta y/\Delta x$	$\overline{v}$
4	3	5	$25 = 5^2$	$21 = 25 - 4$	21/3	7
4	2	4	$16 = 4^2$	$12 = 16 - 4$	12/2	6
4	1	3	$9 = 3^2$	$5 = 9 - 4$	5/1	5
4	0,5	2,5	$6{,}25 = 2{,}5^2$	$2{,}25 = 6{,}25 - 4$	2,25 / 0,5	4,5
4	h	$2 + h$	$(2 + h)^2 = 4 + 4h + h^2$	$4h + h^2 = 4 + 4h + h^2 - 4$	$(4h + h^2)/h$	4 + h

Mit Hilfe dieser Rechnungen bekommen wir immer nur eine Durchschnittsgeschwindigkeit über den Zeitraum Δx bzw. h. Um eine Momentangeschwindigkeit zu erhalten muss der Abstand Δx, bzw. h möglichst klein gewählt werden. Je kleiner er wird, desto kleiner ist der gemachte Fehler und desto näher ist die errechnete Geschwindigkeit am Grenzwert 4 m/s.

Dies schreibt man auf mit „limes“ für Grenzwert:
Wenn h gegen null geht, dann ist der Grenzwert 4:

$$\lim_{h \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{h \to 0} 4 + h = 4$$

Die Momentangeschwindigkeit ist der Grenzwert der Durchschnittsgeschwindigkeiten bei immer kleinerem Zeitabstand.

1.2.2 Momentangeschwindigkeit an jeder Stelle berechnen

Wiederum wird die Tabelle ausgefüllt. Die Momentangeschwindigkeit wird nun allgemein an der Stelle x_0 berechnet:

$$f(x) = x^2$$

$f(x_0)$	Δx	$2 + \Delta x$	$f(2 + \Delta x)$	Δy	$\Delta y/\Delta x$	$\overline{v}$
x_0^2	h	$x_0 + h$	$x_0^2 + 2x_0h + h^2$	$2x_0h + h^2$	$(2x_0h + h^2)/h$	$2x_0 + h$

Wiederum wird untersucht, was passiert, wenn h ganz klein wird:

$$\lim_{h\to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{h\to 0} 2x_0 + h = 2x_0$$

Die Geschwindigkeit berechnet sich also nach 3 s ($x_0 = 3$) zu 6 m/s.
Die Geschwindigkeit berechnet sich also nach 4 s ($x_0 = 4$) zu 8 m/s.
Die Geschwindigkeit berechnet sich also nach 5 s ($x_0 = 4$) zu 10 m/s.
usw.

Diesen Vorgang zur Bestimmung der Momentangeschwindigkeit nennt man Ableitung. Dabei wird letztlich die Steigung der Tangente an dem Graphen von f an der Stelle x_0 bestimmt. Denn, wenn Δx – die zur x-Achse parallele Strecke des Steigungsdreiecks – immer kleiner wird, nähert sich die Steigung des Steigungsdreiecks der Steigung der Tangente an der Kurve. Wenn man also eine Tangente an der Stelle x_0 an den Graphen der Funktion anlegt, dann wird die Steigung dieser Tangente durch die Ableitung angegeben.

Wenn man für jeden Punkt der Funktion f die Ableitung berechnen kann, dann kann man eine weitere Funktion angeben, deren y-Werte die Ableitungen von f sind. (Man kann nicht bei jeder Funktion an jeder Stelle die Steigung angeben.)

1.3 Grafischer Zugang

Gegeben ist ein Berg (Abb. 1.7). Nun soll untersucht werden, welcher Anstrengung man sich aussetzt, wenn man den Berg von links nach rechts überquert.

In Abb. 1.8 ist die Anstrengung aufgetragen, diesen Berg zu überqueren. Natürlich hängt die Anstrengung eng mit der Steigung des Berges zusammen. In einer Ebene kostet es gar keine Anstrengung, um dort zu spazieren. Dagegen eine Kletterwand zu besteigen - eventuell sogar mit Steigeisen - benötigt viel Anstrengung.

- Zu Beginn ist der Berg sehr steil. Nur geübte Bergsteiger können die „Wand“ besteigen. Die Anstrengung ist sehr groß.

- Je weiter man hoch kommt, desto leichter ist die Besteigung.

- Auf dem Gipfel ist das Wandern überhaupt kein Problem mehr. Dies ist schon ein Sonntagnachmittagsspaziergang.
  Da kostet es gar keine Energie / Anstrengung genau oben auf dem Gipfel entlangzuspazieren.

- Rechts vom Gipfel findet der „Abgang“ (= negative „Besteigung“) statt. Nun muss man Arbeit aufwenden, um nicht herunterzufallen.
  Die Anstrengung ist negativ.

- Je weiter man sich rechts vom Gipfel befindet, desto steiler geht es nach unten.

Verschiedenes fällt auf:

1. Je steiler, desto größer die Steigung.

2. Auf der Kuppe (Maximum) ist die Steigung null.

3. Ebenso ist die Steigung im tiefsten Punkt des Tales (am Minimum) null.

4. Wenn der Graph nach unten geht, ist die Steigung negativ.

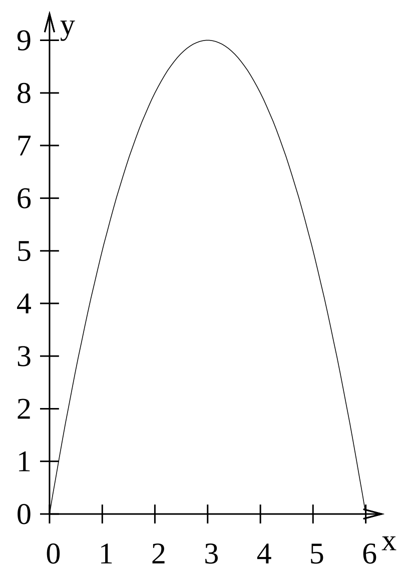


Abbildung 1.7:
Das Profil eines Berges.

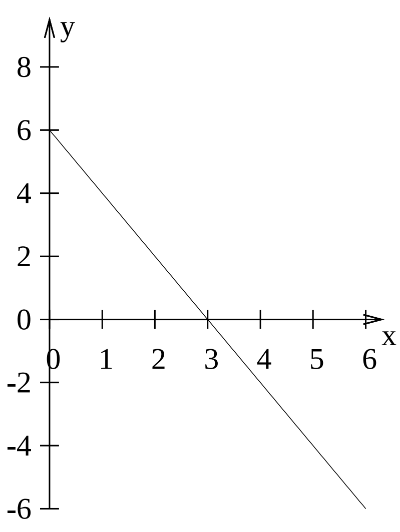


Abbildung 1.8:
In dieser Abbildung ist die Anstrengung aufgetragen, wenn man das Profil des Berges von links nach rechts entlang geht.

1.4 Zusammenfassung

Hier sollen noch einmal die wichtigsten Punkte der Einführung gesammelt werden.

- Sie haben an einem Beispiel die Ableitung durch die Grenzwertbildung[4] der immer kleiner werdenden Steigungsdreiecke bestimmt. Diese Grenzwertbildung ist ein neues Denken, um das die Mathematiker viele Jahrhunderte gerungen haben.

- Naheliegend ist es, dass aus der Entfernungsfunktion ($f(x)$) dann auch eine Geschwindigkeitsfunktion ($f'(x)$) erstellt werden kann. (Es gibt natürlich sehr viele Funktionen, wo man die Ableitung nicht an allen Stellen durchführen kann. Dies soll uns aber in einem ersten Zugriff auf das Thema jetzt nicht weiter stören.)

- Die Ableitungsfunktion, also f'(x), gibt die Steigung an jeder beliebigen Stelle von f(x) an.

- Wenn der Graph von f an einer Stelle x_0 ein Maximum hat, dann ist an der Stelle (x_0) die Steigung null.

- Wenn der Graph von f an einer Stelle x_0 ein Minimum hat, dann ist an der Stelle (x_0) die Steigung null.

- Eine negative Steigung an der Stelle x_0 bedeutet, dass der Graph von f nach unten gerichtet ist an der Stelle x_0.

- Die Ableitung einer quadratischen Funktion ist eine Gerade.

[4] In Wirklichkeit ist die Situation leider wesentlich schwieriger als bei den Funktionen, welche in der Schule benutzt werden. Die Steigungsdreiecke nach links müssen denselben Grenzwert wie die Steigungsdreiecke nach rechts besitzen. Auch ist die Frage - zumindest in der Schule - ungeklärt, ob es egal ist, ob man Δx immer halbiert oder drittelt usw. Natürlich ist es egal, dass kann man beweisen. Es wird aber in der Schule kein Thema sein.

1.5 Aufgaben

Aufgabe 1.1
Untersuchen Sie mit Hilfe der Tabelle an der Stelle $x = 2$ die Geschwindigkeit, bzw. die Ableitung (rechtsseitiger Grenzwert der Steigungsdreiecke), wenn die Entfernung durch die Funktion f gegeben ist:

$$f(x) = 3x^2$$

f(2)	Δx	$2 + \Delta x$	$f(2 + \Delta x)$	Δy	$\Delta y/\Delta x$	$\overline{v}$
	4					
	2					
	1					
	0,5					
	0,25					
	h					

(Lösung siehe Seite 14).

1.6 Lösungen

Zu Aufgabe: 1.1
Es gilt:

$$f(2) = 3 \cdot 2^2 = 2 \cdot 4 = 12$$

f(2)	Δx	2 + Δx	$f(2+\Delta x)$	Δy	$\Delta y/\Delta x$	$\overline{v}$
12	4	6	108	96	96/4	24
12	2	4	48	36	36/2	18
12	1	3	27	15	15/1	15
12	0,5	2,5	18,75	6,75	6,75/0,5	13,5
12	0,25	2,25	15,1875	3,1875	3,1875 / 0,25	12,75
12	h	$2+h$	$12+12h+3h^2$	$12h+3h^2$	$(12h+3h^2)/h$	$12+3h$

$$\lim_{h\to 0}(12+3h) = 12$$

Der Grenzwert ist 12.

Kapitel 2

Ableitung einfacher Funktionen

Um die Steigung einer Funktion zu bestimmen, wird der Differenzialquotient benutzt:

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Diese Formel bildet die Steigungsdreiecke nach rechts.

Der Wert der Ableitung an der Stelle x_0 wird dann durch diesen Quotienten bestimmt.

Mathematiker machen noch weitere Einschränkung:

1. Der Grenzwert muss überhaupt existieren. Wir behaupten das so intuitiv, aber bei $f(x) = \frac{1}{x}$ ist die Steigung im Punkt $x = 0$ nicht zu bestimmen.
2. Der Grenzwert muss auch exisitieren, wenn man von links kommt. Das heißt, man untersucht nicht nur $f(x_0 + h)$ sondern auch $f(x_0 - h)$.

   $$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0) - f(x_0 - h)}{h}$$

   Diese Formel bildet die Steigungsdreiecke nach links.
3. Beide Grenzwerte (der rechtsseitige und der linksseitige) müssen existieren und gleich groß sein.

In der Schule ist das eigentlich kein Problem, einmal aus didaktischen Gründen, um die Probleme nicht zu schwer zu machen und weil gerade bei Anwendungen (z. B. Bergprofil) die Ableitung existiert und eindeutig ist.[1]

Auch klar ist, dass man diese Grenzwerte (von links und von rechts) überhaupt nur berechnen kann, wenn die Funktion stetig ist. **Stetig** ist eine Funktion, wenn

[1] Subjektiv ist die Steigung eines Bergprofils natürlich nicht eindeutig. Wenn Sie mit einem Wanderfreak wandern und sich so gerade den Berg hochschleppen, dann wird die Steigung des Berges subjektiv sicherlich unterschiedlich wahrgenommen. Das ist dann aber wahrscheinlich ein sportliches Problem und kein mathematisches.

man Sie ohne abzusetzen von ganz links bis nach ganz rechts zeichnen kann.
Z. B. : $f(x) = 1/x$ ist nicht stetig bei $x = 0$. Dann kann man für $x = 0$ keine Steigung angeben.

Im folgenden wird der Differenzialquotient benutzt, um einige Ableitungen zu bestimmen. Dann werden Ableitungsregeln aufgestellt.

2.1 $f(x) = x^2$

$$\begin{aligned} f(x_0) &= x_0^2 \\ f(x_0+h) &= (x_0+h)^2 \\ &= x_0^2 + 2x_0h + h^2 \end{aligned}$$

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{x_0^2 + 2x_0h + h^2 - x_0^2}{h}$$

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{2x_0h + h^2}{h}$$

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0} (2x_0 + h) = 2x_0$$

Da Sie nun die Ableitung an jeder Stelle bilden können, erhalten Sie für jeden x-Wert einen zugehörigen Wert ($f'(x)$. Dies können Sie als y-Wert einer neuen Funktion - der Ableitungsfunktion interpretieren. Die Ableitungsfunktion lautet also:

$$f'(x) = 2x$$

Damit können Sie die Steigung an jeder beliebigen Stelle bestimmen. Z. B. ist die Steigung an der Stelle $x = 10$ gleich 20.

2.2 $f(x) = 3x^2$

$$\begin{aligned} f(x_0) &= 3x_0^2 \\ f(x_0+h) &= 3(x_0+h)^2 \\ &= 3(x_0^2 + 2x_0h + h^2) \\ &= 3x_0^2 + 6x_0h + 3h^2 \end{aligned}$$

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{3x_0^2 + 6x_0h + 3h^2 - 3x_0^2}{h}$$

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{6x_0h + 3h^2}{h}$$

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0} (6x_0 + 3h) = 6x_0$$

Die Ableitungsfunktion lautet also:

$$f'(x) = 6x$$

Die Steigung an der Stelle $x = 10$ ist 60.

2.3 $f(x) = ax^2$

a sei eine reelle Zahl.

$$\begin{aligned} f(x_0) &= ax_0^2 \\ f(x_0+h) &= a(x_0+h)^2 \\ &= a(x_0^2+2x_0h+h^2) \\ &= ax_0^2+2ax_0h+ah^2 \end{aligned}$$

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{ax_0^2+2ax_0h+ah^2-ax_0^2}{h}$$

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{2ax_0h+ah^2}{h}$$

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0} (2ax_0+ah) = 2ax_0$$

Die Ableitungsfunktion lautet also:

$$f'(x) = 2ax$$

Die Steigung an der Stelle $x = 10$ ist $20a$.

2.4 $f(x) = x^n$

In diesem Abschnitt soll die Ableitung hergeleitet werden für die Funktion:

$$f(x) = x^n, \qquad n \in \mathbb{N}$$

$$f'(x) = nx^n$$

Die Regel ist aber allgemein gültig für alle Potenzen (außer natürlich $n = 0$).

2.4.1 Das Pascal'sche Dreieck

$$\begin{array}{lcccccccccc} (a+b)^0 & = & & & & & 1 & & & & \\ (a+b)^1 & = & & & & 1a & + & 1b & & & \\ (a+b)^2 & = & & & 1a^2 & + & 2ab & + & 1b^2 & & \\ (a+b)^3 & = & & 1a^3 & + & 3a^2b & + & 3ab^2 & + & 1b^3 & \\ (a+b)^4 & = & 1a^4 & + & 4a^3b & + & 6a^2b^2 & + & 4ab^3 & + & 1b^4 \end{array}$$

Wenn man dies ohne a und b schreibt:

$$\begin{array}{lcccccccccc} (a+b)^0 & = & & & & & 1 & & & & \\ (a+b)^1 & = & & & & 1 & + & 1 & & & \\ (a+b)^2 & = & & & 1 & + & 2 & + & 1 & & \\ (a+b)^3 & = & & 1 & + & 3 & + & 3 & + & 1 & \\ (a+b)^4 & = & 1 & + & 4 & + & 6 & + & 4 & + & 1 \end{array}$$

Es drängen sich sozusagen mehrere Vermutungen auf:

1. In einer Reihe / Zeile beginnt es immer mit $1a^n$. Die Potenz nimmt dann bei den a's immer um eins ab, und bei den b's immer um eins zu.

   Die Summe der Potenzen ist immer n.

2. Zahlen in der 1. Diagonalen sind immer die 1.

3. Zahlen in der 2. Diagonalen sind immer n.

4. Die Zahlen ergeben sich immer als Summe aus den darüberstehenden:
   $1 + 3 = 4$
   $3 + 3 = 6$ usw.

Die letzte Regel werden wir uns klar machen an $(a + b)^4$.

$$(a + b)^3 = 1a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + 1b^3$$

$$(a + b)^4 = \left(1a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + 1b^3\right)(a + b)$$

Jetzt schauen wir uns an, wie die einzelnen Terme zustande kommen. Zuerst die Terme mit a^4, dann a^3 usw.:

$$\begin{array}{rccc} a^4: & a^3 \cdot a & = & a^3 \cdot 1 \\ a^3: & 3a^2b \cdot a + 1a^3 \cdot b & = & a^3b(1+3) \\ a^2: & 3ab^2 \cdot a + 3a^2b \cdot b & = & a^2b^2(3+3) \\ a: & 1b^3 \cdot a + 3ab^2 \cdot b & = & ab^3(1+3) \end{array}$$

Daran kann man deutlich die Bildung erkennen.

Beispiel:

$$(a + b)^5 = a^5 + (1 + 4)a^4b + (4 + 6)a^3b^2 + (6 + 4)a^2b^3 + (4 + 1)ab^4 + 1b^5$$

$$(a + b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$$

$$(a + b)^n = a^n + na^{n-1}b + ...$$

2.4.2 Die Differentation

Wir setzen die Funktion in unseren Differenzialquotienten ein:

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{(x_0 + h)^n - x_0^n}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\left(x_0^n + nx_0^{n-1}h + \overbrace{\cdots}^{\text{Terme mit } h^2}\right) - x_0^n}{h} \qquad x_0^n \text{ hebt sich auf}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{nx_0^{n-1}h + \overbrace{\cdots}^{\text{Terme mit } h^2}}{h} \qquad \text{kürzen mit } h$$

$$= \lim_{h\to 0} (nx_0^{n-1} + \overbrace{\cdots}^{\text{Terme mit } h})$$

$$= nx_0^{n-1}$$

Wenn das für jeden Punkt von $f(x)$ gilt, schreiben wir das kurz als Regel:

$$f(x) = x^n, \qquad f'(x) = n \cdot x^{n-1}$$

Beispiele:

$$f(x) = x^5, \qquad f'(x) = 5 \cdot x^4$$

$$f(x) = x^{15}, \qquad f'(x) = 15 \cdot x^{14}$$

Die Regel ist allgemein gültig für alle Potenzen, außer für null. Das haben wir zwar nicht bewiesen ...

$$f(x) = x^{2/3}, \qquad f'(x) = \frac{2}{3} \cdot x^{-1/3}$$

$$f(x) = \sqrt{x} = x^{1/2}, \qquad f'(x) = \frac{1}{2} \cdot x^{-1/2} = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{x}}$$

Achtung: Die Regel gilt **nicht!** für $n = 0$:

$$f(x) = x^0 = 1, \qquad f'(x) = 0$$

und wie wir noch später sehen werden:

$$f'(x) = x^{-1}, \qquad f(x) = \log(x)$$

2.5 $f(x) = ag(x)$

a sei eine reelle Zahl. g sei eine differenzierbare Funktion.

$$\begin{aligned} f(x_0) &= ag(x_0) \\ f(x_0+h) &= ag(x_0+h) \end{aligned}$$

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{ag(x_0+h) - ag(x_0)}{h}$$

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{a\left(g(x_0+h) - g(x_0)\right)}{h}$$

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0} a \cdot \frac{g(x_0+h) - g(x_0)}{h}$$

$$f'(x_0) = a \cdot \lim_{h\to 0} \frac{g(x_0+h) - g(x_0)}{h}$$

Dies ist aber rechts gerade die Definition des Differenzialquotienten von g:

$$f'(x_0) = a \cdot g'(x_0)$$

2.6 $f(x) = g(x) + k(x)$

a sei eine reelle Zahl. g und k seien differenzierbare Funktionen.

$$\begin{aligned} f(x_0) &= g(x_0) + k(x_0) \\ f(x_0+h) &= g(x_0+h) + k(x_0+h) \end{aligned}$$

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

Zuerst ersetzen wir $f(x_0+h)$ und $f(x_0)$ durch die obigen Terme mit g und k.

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{g(x_0+h) + k(x_0+h) - (g(x_0) + k(x_0))}{h}$$

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{g(x_0+h) + k(x_0+h) - g(x_0) - k(x_0)}{h}$$

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \left(\frac{g(x_0+h) - g(x_0)}{h} + \frac{k(x_0+h) - k(x_0)}{h} \right)$$

Dies ist aber rechts die Definition der Differenzialquotienten von g und k:

$$f'(x_0) = g'(x_0) + m'(x_0)$$

Beispiel:

$$f(x) = 3x^2 + 2x$$

Die Summen werden einzeln abgeleitet:

$$f'(x) = 6x + 2$$

2.7 $f(x) = |x|$

In diesem Beispiel sei die Funktion f die Betragsfunktion: $f(x) = |x|$ [2] (s. Abb. 2.1). Dieses Beispiel wird uns eine Funktion liefern, die stetig ist, aber deren Steigung trotzdem nicht überall berechnet werden kann.

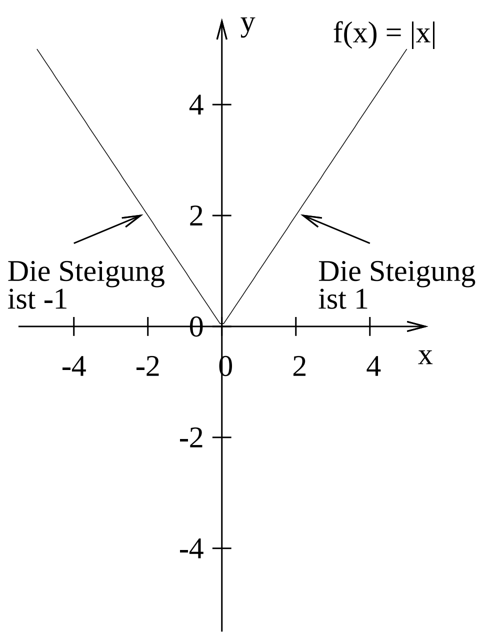


Abbildung 2.1: Die Betragsfunktion: $f(x) = |x|$. Die Funktion besteht aus zwei Geraden, die sich im Punkt (0|0) treffen.

Die Funktion f ist stetig, d. h. Sie können Sie von „links“ bis „rechts“ ohne abzusetzen zeichnen. Sie haben zu jedem x-Wert einen y-Wert.

[2] Zur Erinnerung: Der Betrag einer Zahl ist die Zahl ohne Vorzeichen. Oder anders ausgedrückt, der Betrag einer Zahl ist der Abstand des x-Wertes von der Zahl 0 auf der Zahlengerade. Beispiele: $|2| = 2$, $|-2| = 2$ und $|0| = 0$. Wenn Sie eine positive Zahl für x wählen, erhalten Sie einfach die Zahl selber, dass ist also einfach nur eine Gerade.

Die Funktion besteht aus zwei Geraden. Rechts von der Null sind die y-Werte gleich den x-Werten da gilt also:

$$f(x) = x \text{ für } x \geq 0$$

Dort ist also die Steigung gleich eins.

Links von der Null sind die y-Werte gleich die x-Werte mit -1 multipliziert, damit die Werte positiv sind (aus -2 wird so 2, aus -3 wird so 3 usw.).

$$f(x) = -x \text{ für } x < 0$$

Dort ist also die Steigung gleich -1.

So ist die Funktion bei $x = 0$ nicht ableitbar, denn die Steigung des Graphen von f beträgt links von $x = 0$ -1 und rechts von $x = 0$ 1. Somit sind der linksseitige Grenzwert und der rechtsseitige Grenzwert nicht gleich groß.

2.8 Übersicht

Einige häufige Schwierigkeiten sollen kurz vorgestellt werden:

1. $f(x) = 3$. ist eine Gerade, parallel zur x-Achse, denn alle y-Werte sind 3. Also ist die Steigung 0. $f'(x) = 0$

2. $$f(x) = x^2 + 10, \qquad g(x) = x^2 + 100$$
   haben beide dieselbe Steigung an jeder Stelle:
   $$f'(x) = 2x, \qquad g'(x) = 2x$$
   Dies macht Sinn, denn f und g sind parallel verschoben. Stellen Sie sich eine Kletterwand in Holland und dieselbe Kletterwand in den Alpen vor. Die eine Wand ist höher über dem Meeresspiegel. Doch Ihr Schweiß beim Besteigen der Wände bleibt in beiden Fällen gleich. Die Steigung ist nämlich gleich.

   Wenn f die Entfernungsfunktion eines Autos ist, dann ist es egal wo der Beobachter steht. Unterschiedliche Beobachter messen dieselbe Geschwindigkeit f' obwohl die Entfernungsfunktion f sich um eine Konstante (die Differenz der Beobachter) unterscheidet.

3. $$f(x) = 5 \cdot x^3 + 2x + 4$$
   Dies kann summandenweise abgeleitet werden:

   $5 \cdot x^3 \to 5 \cdot 3 \cdot x^2 = 15 \cdot x^2$
   Der Exponent (3) kommt als Faktor davor und dann wird der Exponent um eins vermindert ($3 \to 2$).

   $2x + 4 \to 2$
   Denn $2x+4$ ist eine lineare Funktion $mx + b$ mit der Steigung: 2.

   $$f'(x) = 15x^2 + 2$$

4. Bei der Umkehrung[3], wenn man von der Geschwindigkeitsfunktion auf die Entfernungsfunktion schließen will, empfiehlt es sich, **zuerst den Exponenten** zu erhöhen, und dann durch diesen Wert zu teilen:
   $f'(x) = 12x^3$
   (a) $f(x) = 12 \cdots x^4$
   (b) Dann teilen Sie mit dem neuen Exponenten in diesem Fall die 4:
   $f(x) = 12/4x^4 = 3x^4$
   (c) Weil nach 2 jede beliebige Konstante addiert werden kann und dann auch wieder $f'(x)$ ergäbe beim Ableiten deuten Sie das an, indem Sie ein „$+c$" ergänzen:
   $$f'(x) = 12x^3 \qquad f(x) = 3x^4 + c$$

[3]Die Umkehrung des Ableitens oder Differenzierens nennt man Aufleiten oder Integrieren

2.9 Aufgaben

Aufgabe 2.1 Ergänzen Sie:

$f(x)$	$f'(x)$
x^4	
x^2	
$2x$	
$5x^3$	
$2x^3 + 2x$	

(Lösung siehe Seite 27).

Aufgabe 2.2 Ergänzen Sie:

$f(x)$	$f'(x)$
$4x^3 + 10$	
$4x^3 + 5$	
$0{,}5x^2$	
	$2x$
	$6x^2$
	$12x^3$

(Lösung siehe Seite 27).

Aufgabe 2.3 Ergänzen Sie:

$f(x)$	$f'(x)$
$x^3 + 3$	
$x^2 - 3x$	
	x
	x^2
	x^3

(Lösung siehe Seite 27).

Aufgabe 2.4 Ergänzen Sie: (Ergänzung)

$f(x)$	$f'(x)$
$\sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$	
$\sqrt[4]{x^3} = x^{\frac{3}{4}}$	
$\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$	
$x^{\frac{12}{5}}$	
	$x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$
	$x^{2/3} = \sqrt[3]{x^2}$
	$x^{\frac{12}{5}}$

(Lösung siehe Seite 28).

2.10 Lösungen

Zu Aufgabe: 2.1 Ergänzen Sie:

$f(x)$	$f'(x)$
x^4	$4x^3$
x^2	$2x$
$2x$	2
$5x^3$	$15x^2$
$2x^3 + 2x$	$6x^2 + 2$

Zu Aufgabe: 2.2 Ergänzen Sie:

$f(x)$	$f'(x)$
$4x^3 + 10$	$12x^2$
$4x^3 + 5$	$12x^2$
$0{,}5x^2$	x
$x^2 + c$	$2x$
$2x^3 + c$	$6x^2$
$3x^4 + c$	$12x^3$

Zu Aufgabe: 2.3 Ergänzen Sie:

$f(x)$	$f'(x)$
x^3+3	$3x^2$
x^2-3x	$2x-3$
$0{,}5\,x^2+c$	x
$\frac{1}{3}x^3+c$	x^2
$\frac{1}{4}x^4+c$	x^3

Zu Aufgabe: 2.4 Ergänzen Sie:

$f(x)$	$f'(x)$
$x^{\frac{1}{3}}$	$\frac{1}{3}\cdot x^{\frac{-2}{3}} = \frac{1}{3\cdot\sqrt[3]{x^2}}$
$x^{\frac{3}{4}}$	$\frac{3}{4}\cdot x^{\frac{-1}{4}} = \frac{3}{4\cdot\sqrt[4]{x}}$
$x^{\frac{1}{2}}$	$\frac{1}{2}\cdot x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\cdot\sqrt{x}}$
$x^{\frac{12}{5}}$	$\frac{12}{5}\cdot x^{\frac{7}{5}}$
$\frac{2}{3}\cdot x^{\frac{3}{2}}+c$	$x^{\frac{1}{2}}$
$\frac{3}{5}\cdot x^{\frac{5}{3}}+c$	$x^{\frac{2}{3}}$
$\frac{5}{17}\cdot x^{\frac{17}{5}}+c$	$x^{\frac{12}{5}}$

Kapitel 3

Grafisches Ab- und Aufleiten

3.1 Grafisch Ableiten

In diesem Kapitel können Sie das grafische Ableiten üben und zur Vertiefung, um zu sehen, dass Sie es gut können auch die Aufleitung. Die Aufgaben zur Aufleitung können Sie aber auch überspringen und dann üben Sie jetzt nur das grafische Ableiten. Eventuell kommen Sie dann später bei den Rechnungen zurück auf das grafische Aufleiten. Beide Vorgehensweisen sind möglich. Sie können zuerst ganz intensiv den grafischen Zugang durchdringen oder den klassischen Weg gehen zuerst die Differnzialrechnung und dann die Integralrechnung zu bearbeiten.

Beim grafischen Ableiten können Sie nur den ungefähren Verlauf der Ableitung angeben. Den genauen Verlauf also die genauen y-Werte sind Ihnen unbekannt.

3.1.1 Vorgehen:

1. Zuerst Suchen Sie in der Originalfunktion die Maxima, Minima und eventl. Wendestellen.

2. Dann zeichnen Sie in der 1. Ableitung bei jedem x-Wert wo f ein Maximum oder Minimum hat eine Nullstelle ein.

3. In der 1. Ableitung muss bei jedem x-Wert wo f eine Wendestelle hat ein Maximum oder ein Minimum sein.

3.2 Grafisch Aufleiten

Die aufgeleitete Funktion heißt F.

3.2.1 Vorgehen:

1. Beim Aufleiten untersuchen Sie zuerst die Nullstellen von f:

- Eine Nullstelle mit einem Vorzeichenwechsel von „+“ nach „-“ ergibt ein Maximum bei F an der Stelle.
- Eine Nullstelle mit einem Vorzeichenwechsel von „-“ nach „+“ ergibt ein Minimum bei F an der Stelle.
- Eine Nullstelle ohne Vorzeichenwechsel von „+“ nach „+“ ergibt einen Sattelpunkt von unten ansteigend und weiter steigend.
- Eine Nullstelle ohne Vorzeichenwechsel von „-“ nach „-“ ergibt einen Sattelpunkt von oben fallend und weiter fallend.

3.2.2 Zusammenhänge

	f(x)	f’(x)
	Maximum	Nullstelle
	Minimum	Nullstelle
	Wendestelle	Maximum oder Minimum
Gerade:	parallel zur x-Achse	null, keine Steigung
	alle anderen (schneiden die x-Achse)	Parallele zur x-Achse, gleichbleibende Steigung

3.3 Aufgaben

Aufgabe 3.1
Ein Ball fällt von einem Turm. Auf der y-Achse ist die Entfernung von der Turmspitze eingetragen. Bestimmen Sie grafisch skizzenhaft die Geschwindigkeitsfunktion: die Ableitung.

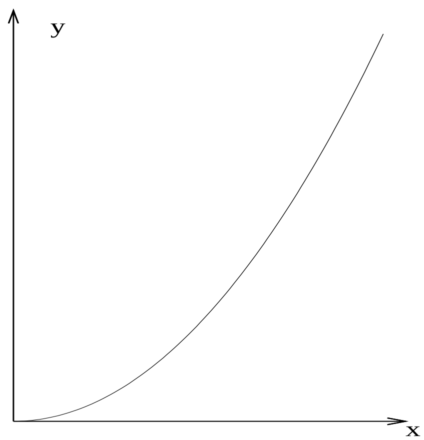


Abbildung 3.1

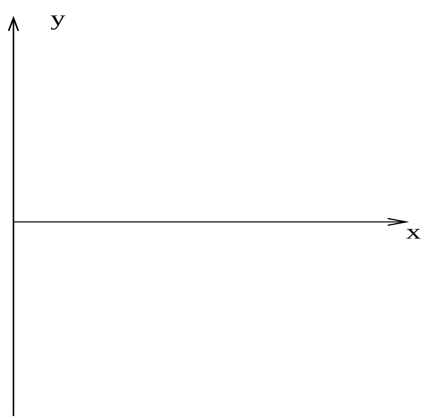
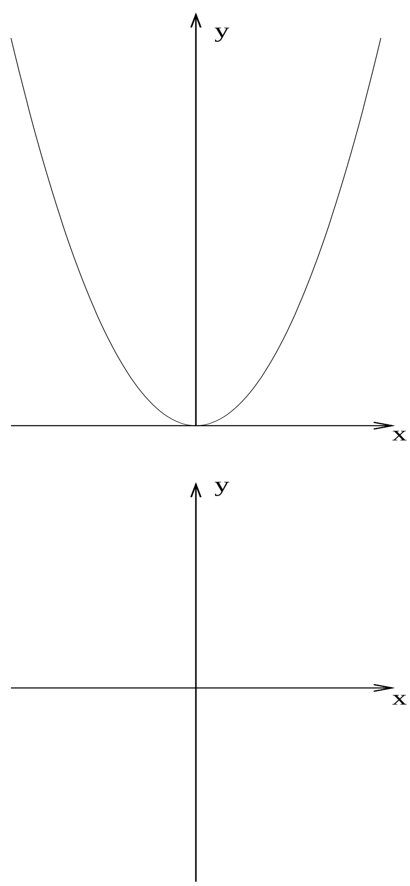


Abbildung 3.2

(Lösung siehe Seite 36).

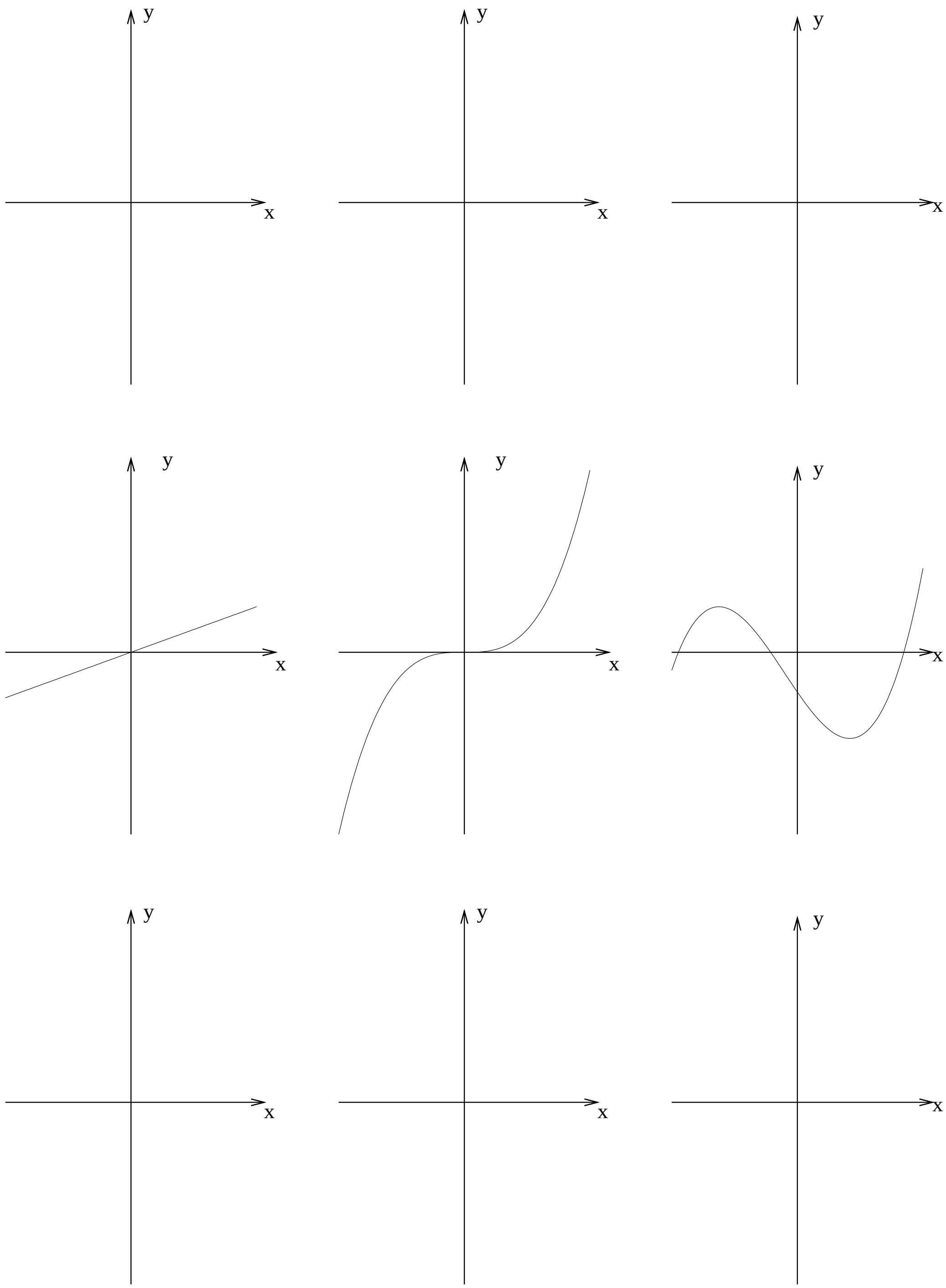
Aufgabe 3.2
Bestimmen Sie grafisch skizzenhaft die Ableitung.

Bestimmen Sie die Ableitung einer Parabel ($f(x) = x^2$). Das Bild könnte z. B. eine Skaterbahn darstellen. Die x-Achse gibt die Entfernung von der Mitte an, die y-Achse die Höhe. Dann ist die Ableitung die Steigung der Bahn.



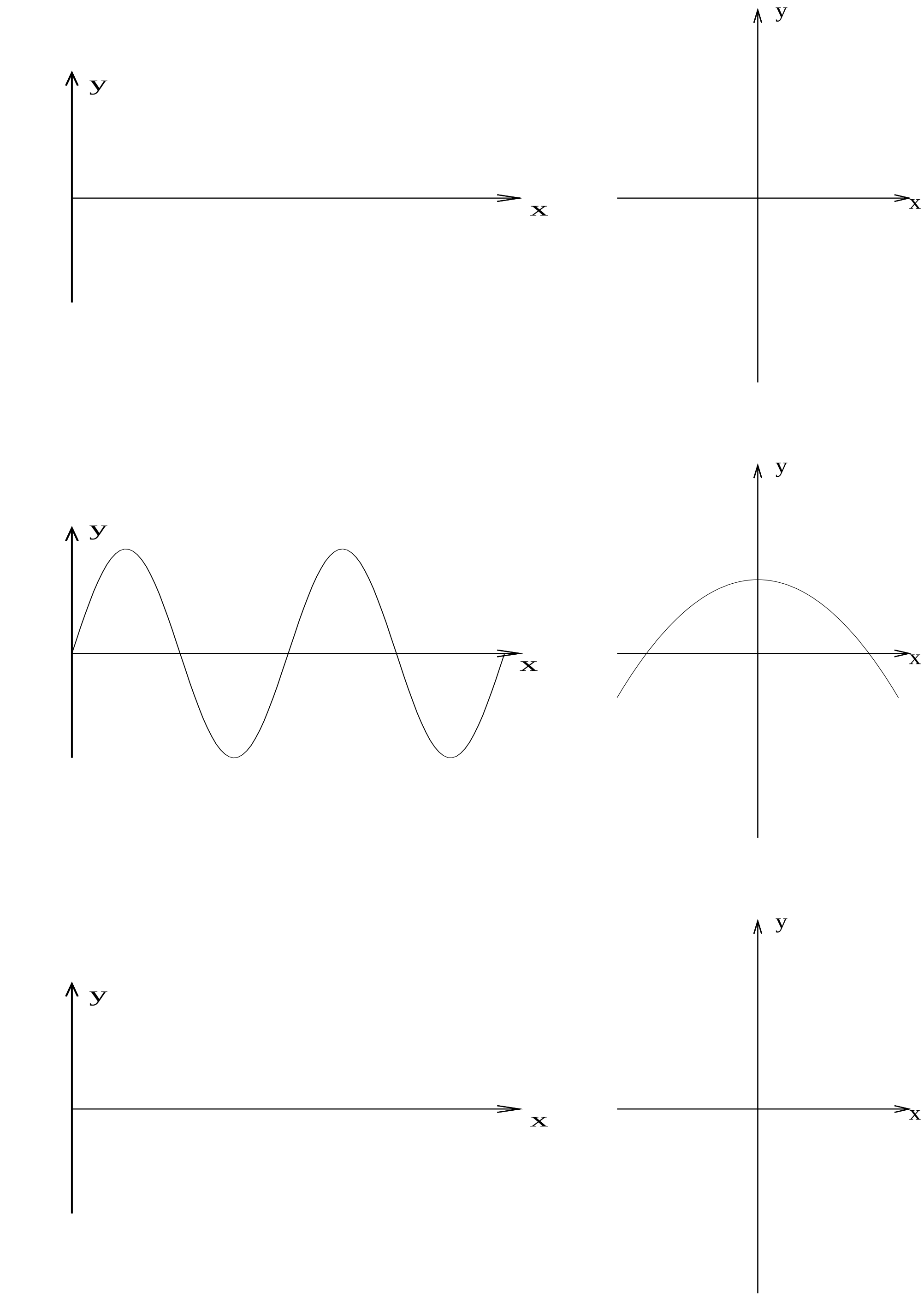
(Lösung siehe Seite 37).

Aufgabe 3.3
Leiten Sie grafisch skizzenhaft auf und ab.



(Lösung siehe Seite 38).

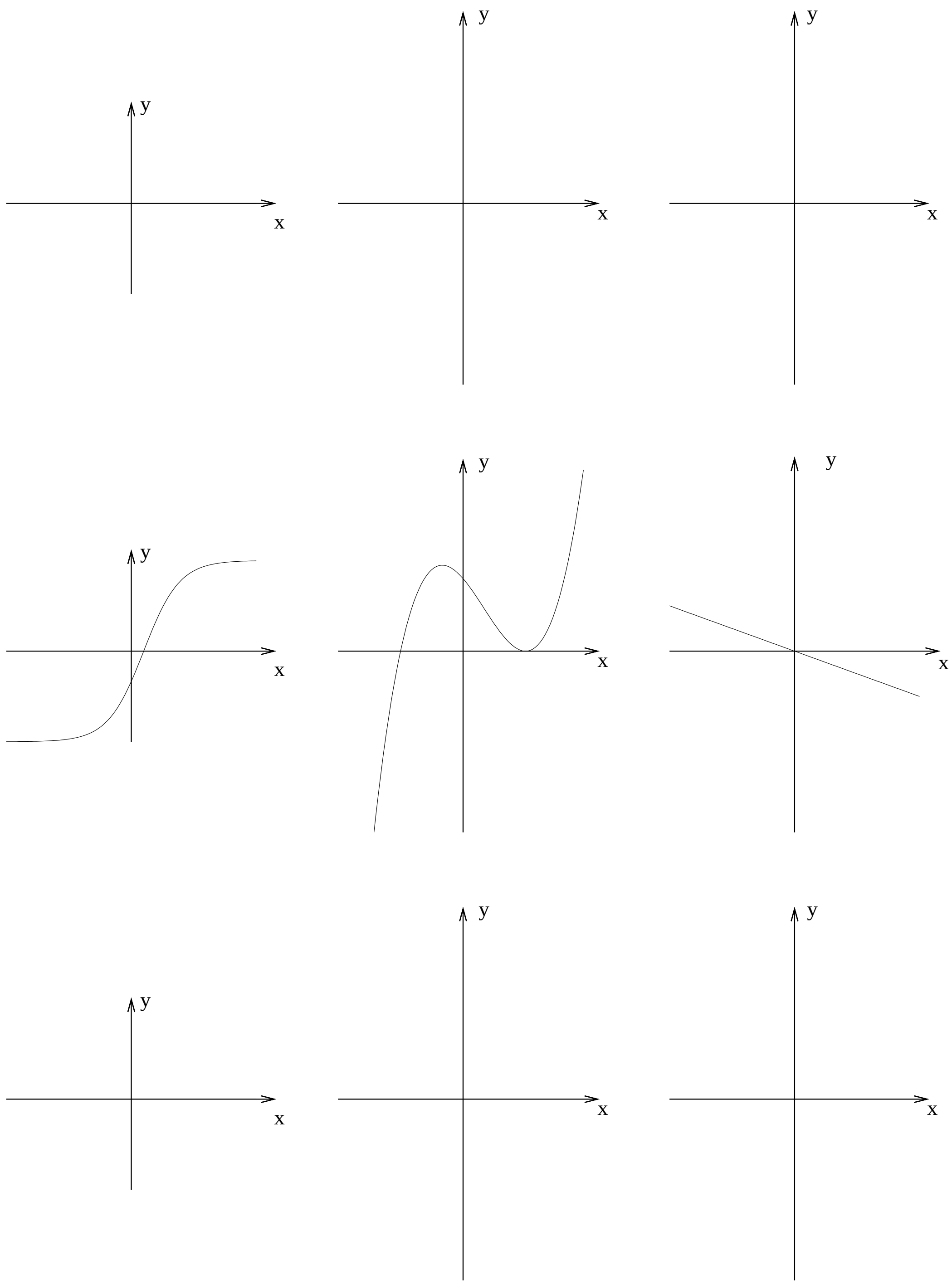
Aufgabe 3.4
Leiten Sie grafisch skizzenhaft auf und ab.



(Lösung siehe Seite 39).

Aufgabe 3.5

Leiten Sie grafisch skizzenhaft auf und ab.



(Lösung siehe Seite 40).

3.4 Lösungen

Zu Aufgabe: 3.1
Ein Ball fällt von einem Turm. Bestimmen Sie die Geschwindigkeitsfunktion, die Ableitung.

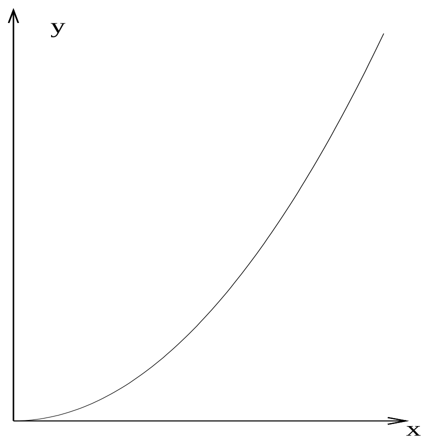


Abbildung 3.3

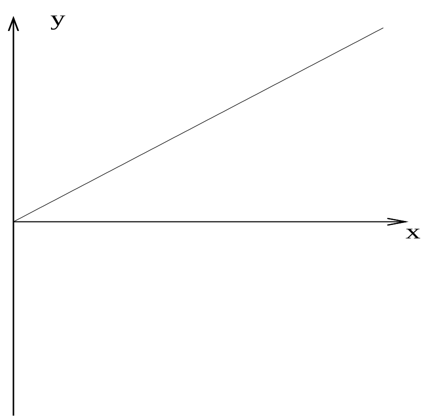


Abbildung 3.4

Zu Aufgabe: 3.2
Die Ableitung der Parabel ($f(x) = x^2$) und die Ableitung von ($f(x) = x^4$), weil Sie diese Graphen ja nicht unterscheiden können.

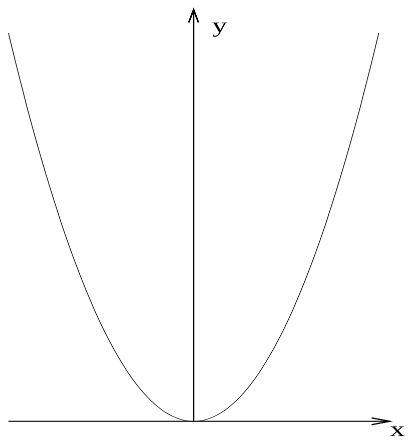


Abbildung 3.5

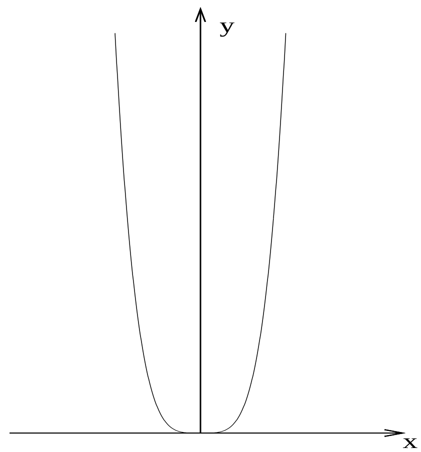


Abbildung 3.6

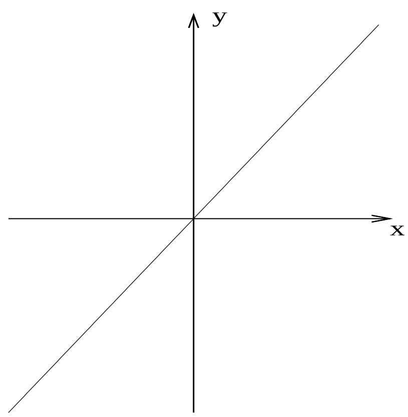


Abbildung 3.7

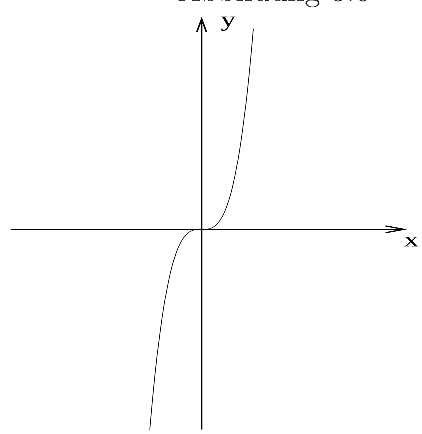
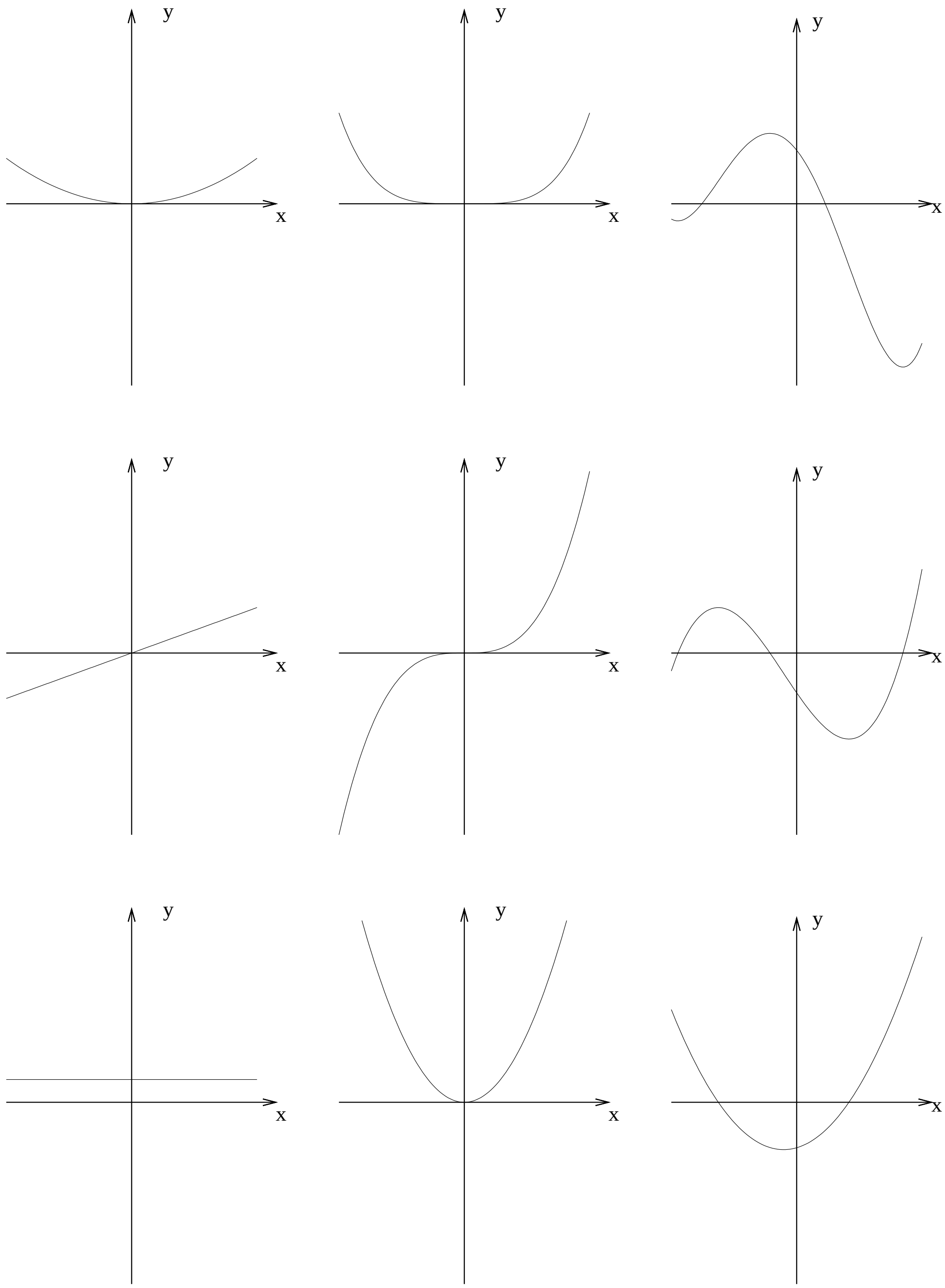
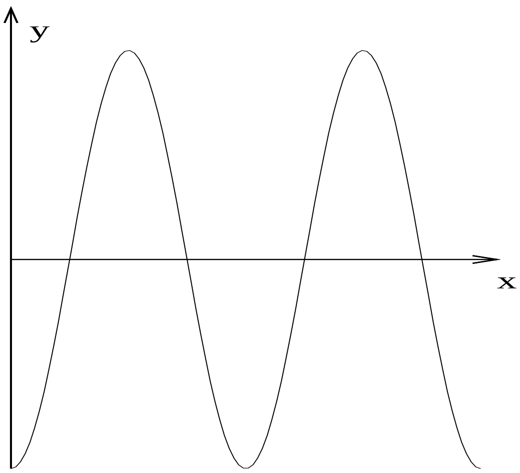


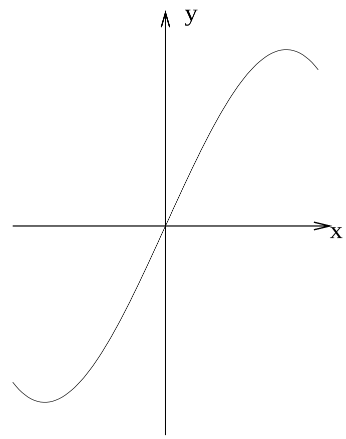
Abbildung 3.8

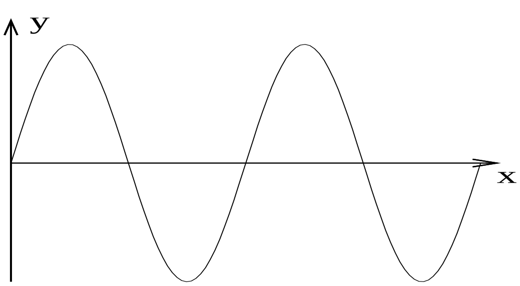
Zu Aufgabe: 3.3

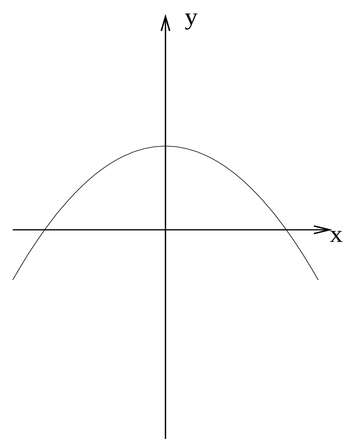


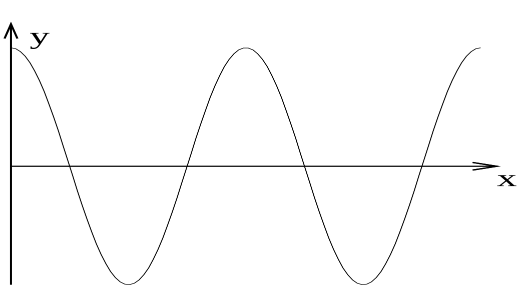
Zu Aufgabe: 3.4

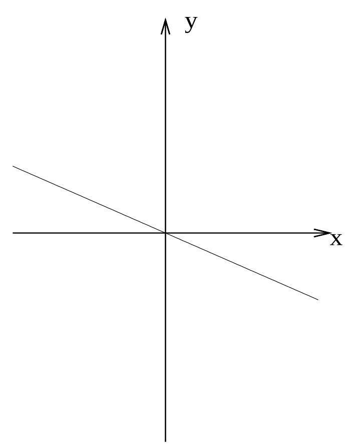




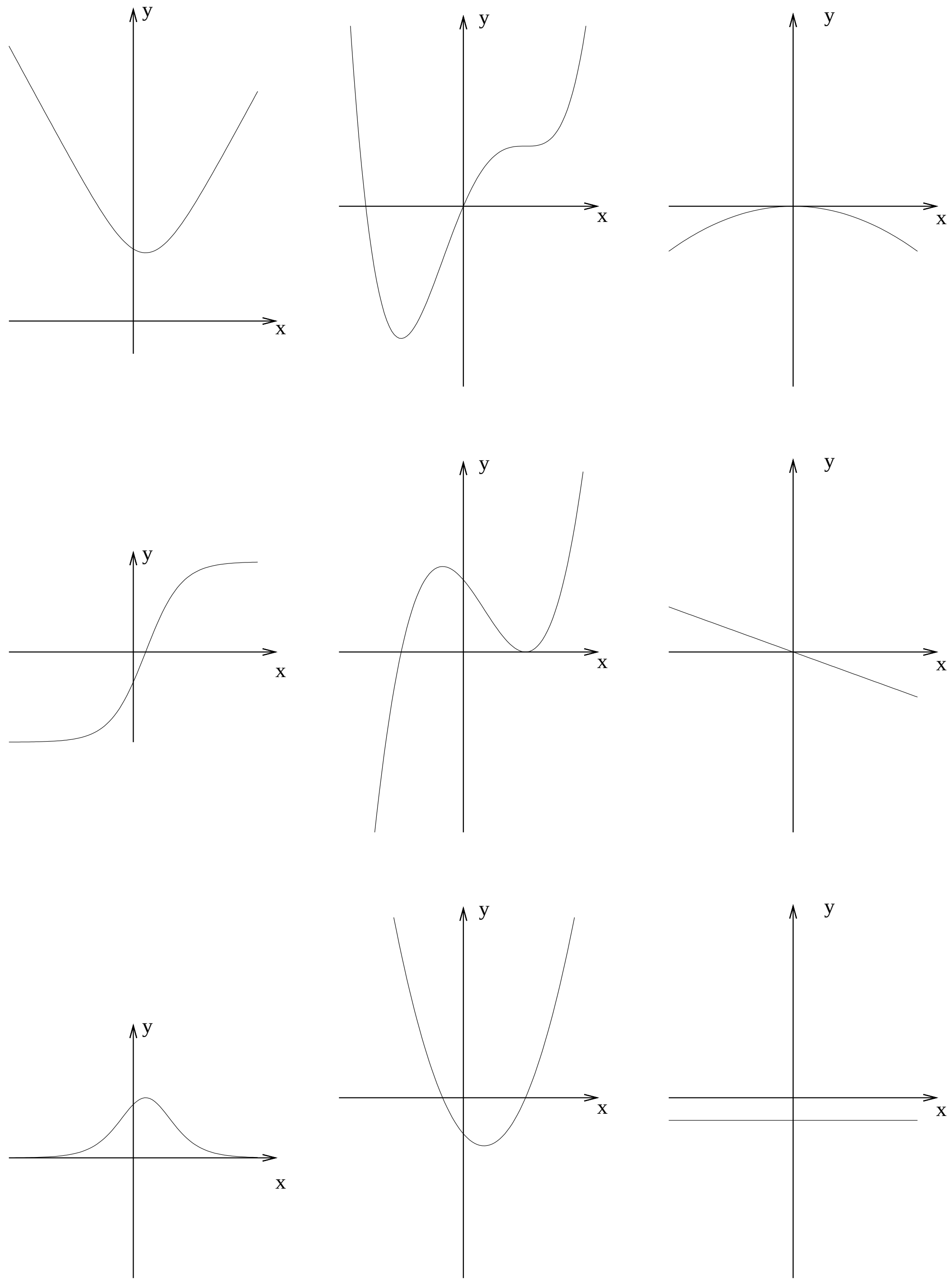








Zu Aufgabe: 3.5



Kapitel 4

Extremstellen

Eine wichtige Anwendung ist die Bestimmung von Maxima und Minima. In diesem Kapitel geht es darum, Bedingungen zu formulieren, um diese Extremstellen aus der Funktion heraus bestimmen zu können.

4.1 Notwendige Bedingung

In diesem Abschnitt gilt es herauszufinden, welche Bedingungen notwendig sind, dass eine Extremstelle (Maximum oder Minimum) vorliegt.

In Abb. 4.1 ist deutlich zu sehen, dass an der Stelle, wo ein Minimum oder ein Maximum vorhanden ist, die Steigung jeweils null ist.

Wenn an der Stelle x_0 ein Extremum vorhanden ist, dann gilt:

$$f'(x_0) = 0$$

Diese Bedingung reicht aber noch nicht aus, denn es könnte ja auch eine Wendestelle vorliegen (siehe Abb. 4.2).

4.2 Hinreichende Bedingung

Die Extremstellen müssen abgegrenzt werden zu den Sattelpunkten. Bei den Sattelpunkten ist die Steigung auch jeweils null (siehe Abb. 4.2).

Die notwendige Bedingung für eine Extremstelle ist, dass die Ableitung an der Stelle null ergibt. Dies ist aber nicht ausreichend als Kriterium, da es sich auch um eine Wendestelle (Sattelpunkt) handeln könnte. **Hinreichend** wird das Kriterium erst, wenn zusätzlich noch entweder das Vorzeichen bei der Steigung wechselt, oder die Steigung der Steigung (s. u.) nicht null ist. (Die Steigung, $f'(x)$ an der Stelle also keinen Berührpunkt mit der x-Achse hat. Dann hat die Steigung dort auch keine Extremstelle. Zur Erinnerung: bei einer Wendestelle ist die Steigung extremal).

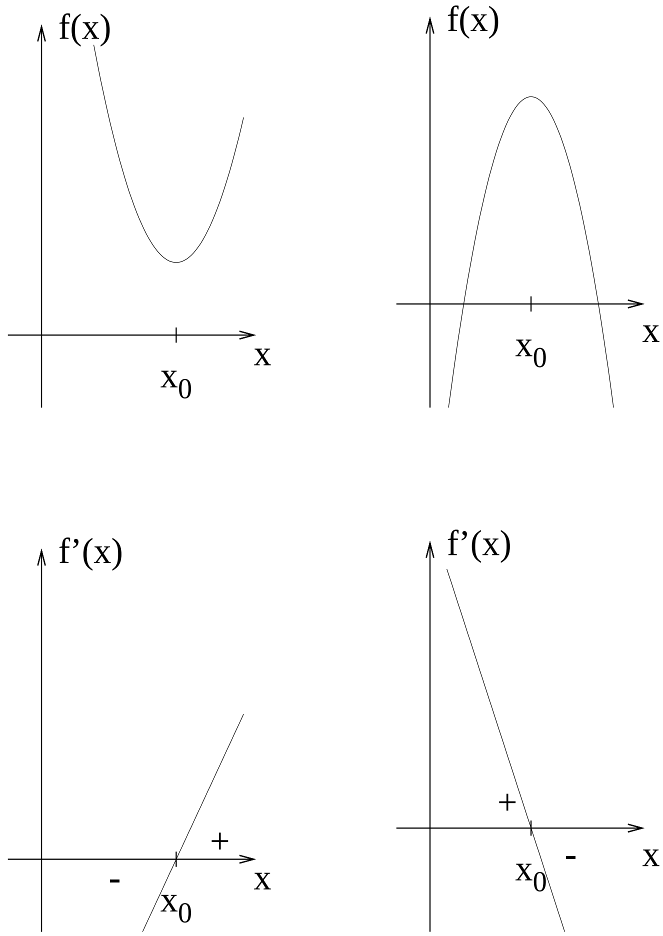


Abbildung 4.1: Ein Minimum und ein Maximum und die jeweilige Ableitung.

4.2.1 Das Vorzeichenkriterium

Wenn das Vorzeichen der Ableitung von „+“ nach „-“ wechselt, liegt ein Maximum vor.

Zuerst steigt die Kurve (Ableitung: „+“), dann fällt sie (Ableitung: „-“). Dann muss dort ein Gipfel (Maximum) vorhanden sein.

Wenn das Vorzeichen der Ableitung von „-“ nach „+“ wechselt, liegt ein Minimum vor.

Zuerst sinkt die Kurve (Ableitung: „-“), dann steigt sie (Ableitung: „+“). Dann muss dort ein Tal (Minimum) vorhanden sein.

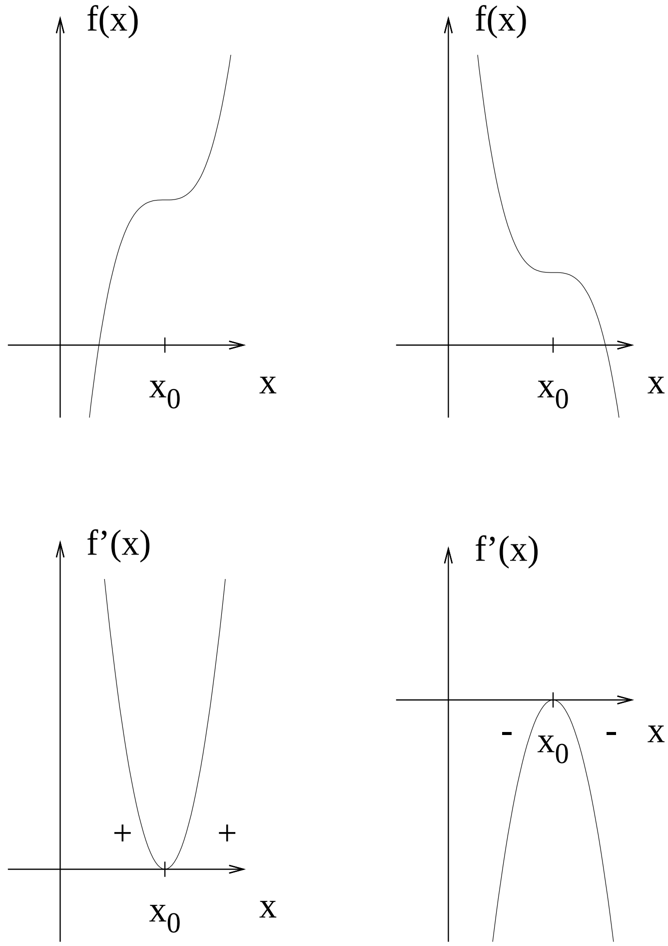


Abbildung 4.2: Die beiden möglichen Sattelpunkte und
die jeweilige Ableitung.

4.2.2 Steigungskriterium

Wenn ein Maximum vorhanden ist, wechselt das Vorzeichen der Ableitung von „+“ nach „-“. Oder anders, an der Stelle hat $f'(x)$, also die Ableitungsfunktion eine negative Steigung.

Also muss gelten:

$$f''(x_0) < 0$$

Wenn ein Minimum vorhanden ist, wechselt das Vorzeichen der Ableitung von „-“ nach „+“. Oder anders, an der Stelle hat $f'(x)$, also die Ableitungsfunktion eine positive Steigung.

Also muss gelten:

$$f''(x_0) > 0$$

4.2.3 Kriterium der höheren Ableitung

Wenn Sie z. B. die Funktion $f(x) = x^6$ haben, dann haben Sie an der Stelle $x = 0$ ein Minimum, weil es sich um eine Parabel höherer Ordnung handelt.

An der Stelle $x = 0$ hat aber auch die erste Ableitung: $f'(x) = 6x^5$ eine Nullstelle. Dies ist also ein Beispiel für eine Funktion, bei der die erste Ableitung und folgende an der Stelle auch null sind.

Sie können nun das Vorzeichenkriterium anwenden oder folgende (unbewiesene) Regel: Wenn eine der höheren Ableitungen an der Stelle ungleich null ist, dann handelt es sich bei f um eine Extremstelle, wenn die höhere Ableitung „gerade" ist und um eine Wendestelle, wenn die höhere Ableitung „ungerade" ist.

Beispiel:

$$\begin{aligned} f(x) &= x^6 & & \\ f'(x) &= 6\,x^5 & f'(0) &= 0 \\ f''(x) &= 30\,x^4 & f''(0) &= 0 \\ f'''(x) &= 120\,x^3 & f'''(0) &= 0 \\ f^{IV}(x) &= 360\,x^2 & f^{IV}(0) &= 0 \\ f^{V}(x) &= 720\,x & f^{V}(0) &= 0 \\ f^{VI}(x) &= 720 & f^{VI}(0) &= 720 \neq 0 \end{aligned}$$

Da 6 eine gerade Zahl ist, hat $f(x) = x^6$ eine Extremstelle bei $x = 0$.

4.3 Beispiel

1. Gegeben ist die Funktion

$$f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x + 2$$

Gesucht sind die Extremstellen:

(a) Notwendige Bedingung:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 0 \\ f'(x) &= 3x^2 + 6x - 9 \\ 3x^2 + 6x - 9 &= 0 \end{aligned}$$

Die Lösungen sind: $x = 1$ oder $x = -3$.

(b) Hinreichende Bedingung:
Wenn es Extremstellen gibt, sind diese höchstens bei $x = 1$ oder $x = -3$.

Sie können jetzt entweder das Vorzeichenkriterium benutzen oder die 2. Ableitung zu Hilfe nehmen, um zu entscheiden, ob an der Stelle ein Sattelpunkt oder eine Extremstelle (und welche: Maximum oder Minimum) vorliegt.

i. **Das Vorzeichenkriterium** Auf dem Zahlenstrahl liegt -4 links von der -3. 0 zwischen -3 und 1 und 2 rechts von der 1.

$$\begin{aligned} f'(-4) &= 15 > 0 \\ f'(0) &= -9 < 0 \\ f'(2) &= 15 > 0 \end{aligned}$$

An der Stelle $x = -3$ liegt ein Vorzeichenwechsel von $+$ nach $-$ vor. Also ist bei $x = -3$ eine Extremstelle vorhanden und es handelt sich um ein lokales Maximum.
An der Stelle $x = 1$ liegt ein Vorzeichenwechsel von $-$ nach $+$ vor. Also ist bei $x = 1$ eine Extremstelle vorhanden und es handelt sich um ein lokales Minimum.

ii. **Mit Hilfe der 2. Ableitung**

$$\begin{aligned} f''(x) &= 6x + 6 \\ f''(-3) &= 6 \cdot (-3) + 6 = -12 < 0 \end{aligned}$$

also ist an der Stelle $x = -3$ ein Maximum vorhanden.

$$f''(1) = 6 \cdot 1 + 6 = 12 > 0$$

also ist an der Stelle $x = 1$ ein Minimum vorhanden.

(c) Angeben der Punkte:

$$\begin{aligned} f(-3) &= (-3)^3 + 3(-3)^2 - 9(-3) + 2 = 29 \\ f(1) &= 1^3 + 3 \cdot 1^2 - 9 \cdot 1 + 2 = -3 \end{aligned}$$

Es ist ein Maximum vorhanden bei: (-3|29).
Es ist ein Minimum vorhanden bei: (1|-3).

4.4 Aufgaben

Aufgabe 4.1

$$f(x) = 4x^3 + 6x^2 - 72x$$

Bestimmen Sie die Extrempunkte von $f(x)$.
(Lösung siehe Seite 47).

Aufgabe 4.2

$$f(x) = x^2 - 2x - 5$$

Bestimmen Sie den Scheitelpunkt und schreiben Sie die Funktion in der Scheitelpunktsform.
(Lösung siehe Seite 48).

Aufgabe 4.3

$$f(x) = 3x^2 + 12x + 4$$

Bestimmen Sie den Scheitelpunkt und schreiben Sie die Funktion in der Scheitelpunktsform.
(Lösung siehe Seite 49).

Aufgabe 4.4

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

Bestimmen Sie den Scheitelpunkt.
(Lösung siehe Seite 50).

4.5 Lösungen

Zu Aufgabe: 4.1

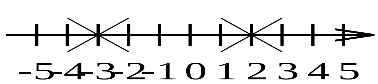
$$f(x) = 4x^3 + 6x^2 - 72x$$

1. Ableitung:
$$f'(x) = 12x^2 + 12x - 72$$

2. notwendige Bedingung: $f'(x) = 0$
$$\begin{aligned} f'(x) &= 0 \\ 12x^2 + 12x - 72 &= 0 \quad \mid : 12 \\ x^2 + x - 6 &= 0 \\ x^2 + x &= 6 \\ \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 &= 6 + \frac{1}{4} \\ \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 &= \frac{25}{4} \\ x + \frac{1}{2} &= \pm\frac{5}{2} \\ x = -\frac{6}{2} \quad &\text{od.} \quad x = \frac{4}{2} \\ x_1 = -3 \quad &\text{od.} \quad x_2 = 2 \end{aligned}$$
$x_1 = -3$ und $x_2 = 2$ sind mögliche Extremstellen.

3. hinreichende Bedingung: $f'(x_0) = 0$ und es ist ein Vorzeichenwechsel bei $f'(x)$ an der Stelle x_0.

   (a) Das Vorzeichenkriterium:



Um das Vorzeichenkriterium anzuwenden, werden drei beliebige x-Werte gesucht, die vor, zwischen und nach -3 und 2 liegen. Vorzugsweise einfach zu rechnende Werte (z. B. wie hier: -4, 0 und 3).

$$\begin{aligned} f'(-3) &= 0 \text{ und} \\ f'(2) &= 0 \text{ und} \\ f'(-4) &= 216 > 0 \\ f'(0) &= -72 < 0 \\ f'(3) &= 72 > 0 \end{aligned}$$

($f'(x)$ ist stetig, d. h. der Graph kann ohne abzusetzen von links nach rechts gezeichnet werden. Da es nur die beiden Nullstellen gibt, haben alle y-Werte von $f'(x)$ ‘links“ von $x = -3$ dasselbe Vorzeichen. $f'(x)$ ist links von $x = -3$ immer größer als null, bzw. oberhalb der x-Achse. Zwischen $x = -3$ und $x = 2$ sind dann die y-Werte von $f'(x)$ immer kleiner als null. Für alle x-Werte, die größer als 2 sind, sind die y-Werte von $f'(x)$ wieder größer als null. Darum ist es dann auch egal, welche Werte man nimmt, wichtig ist, dass es jeweils ein Wert auf dem Zahlenstrahl links von der -3, einer zwischen -3 und 2 und einer rechts von der 2 ist.)

Vorzeichenwechsel von $+$ nach $-$ bei $x = -3$. Also hat die Funktion f an der Stelle $x = -3$ ein lokales Maximum.

Vorzeichenwechsel von $-$ nach $+$ bei $x = 2$. Also hat die Funktion f an der Stelle $x = 2$ ein lokales Minimum.

(b) Mit Hilfe der 2. Ableitung:

$$\begin{aligned} f(x) &= 4x^3 + 6x^2 - 72x \\ f'(x) &= 12x^2 + 12x - 72 \\ f''(x) &= 24x + 12 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f'(-3) &= 0 \text{ und} \\ f'(2) &= 0 \text{ und} \\ f''(-3) &= 24 \cdot (-3) + 12 = -72 + 12 = -60 < 0 \\ f''(2) &= 24 \cdot (2) + 12 = 48 + 12 = 60 > 0 \end{aligned}$$

An der Stelle $x = -3$ hat die Funktion f ein lokales Maximum, an der Stelle $x = 2$ hat die Funktion f ein lokales Minimum.

4. Punkte:
   Einsetzen in die Originalfunktion: $f(x)$.

$$\begin{aligned} f(-3) &= 162 \\ f(2) &= -88 \end{aligned}$$

   Es ist ein Tiefpunkt bei $(-3|162)$ und ein Hochpunkt bei $(2|-88)$ vorhanden.

Zu Aufgabe: 4.2

$$f(x) = x^2 - 2x - 5$$

1. Ableitung:

$$f'(x) = 2x - 2$$

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 - 2x - 5 \\ f'(x) &= 2x - 2 \\ f''(x) &= 2 \end{aligned}$$

2. notwendige Bedingung: $f'(x) = 0$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 0 \\ 2x - 2 &= 0 \\ 2x &= 2 \\ x &= 1 \end{aligned}$$

   Bei $x = 1$ ist eine mögliche Extremstelle.

3. hinreichende Bedingung: $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) \neq 0$
   Mit Hilfe der 2. Ableitung:

$$\begin{aligned} f'(1) &= 0 \\ f''(x) &= 2 \\ f''(1) &= 2 > 0 \end{aligned}$$

   Es liegt ein Minimum vor an der Stelle $x = 1$.

4. Der Scheitelpunkt:
   Einsetzen in die Originalfunktion: $f(x)$.

$$\begin{aligned} f(1) &= 1^2 - 2 \cdot 1 - 5 \\ &= 1 - 2 - 5 \\ &= -6 \end{aligned}$$

   Der Scheitelpunkt hat die Koordinaten: $(1|{-6})$

5. Die Scheitelpunktsform:
   Die Scheitelpunktsform lautet dann:

$$f(x) = (x - 1)^2 - 6 = x^2 - 2x - 5$$

   Wenn Sie für x den Wert 1 einsetzen, wird die Klammer null und die Konstante -6 gibt den Wert der y-Koordinate des Scheitelpunktes an.

$$f(1) = (1 - 1)^2 - 6 = -6$$

Zu Aufgabe: 4.3

$$f(x) = 3x^2 + 12x + 4$$

1. Ableitungen:

$$\begin{aligned} f(x) &= 3x^2 + 12x + 4 \\ f'(x) &= 6x + 12 \\ f''(x) &= 6 \end{aligned}$$

2. notwendige Bedingung: $f'(x) = 0$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 0 \\ 6x + 12 &= 0 \\ 6x &= -12 \\ x &= -2 \end{aligned}$$

$x = -2$ ist eine mögliche Extremstelle.

3. hinreichende Bedingung: $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) \neq 0$
Mit Hilfe der 2. Ableitung:

$$\begin{aligned} f'(-2) &= 0 \\ f''(-2) &= 6 > 0 \end{aligned}$$

Die Funktion f hat an der Stelle $x = -2$ ein lokales Minimum.

4. Der Scheitelpunkt:
Einsetzen in die Originalfunktion: $f(x)$.

$$\begin{aligned} f(-2) &= 3 \cdot (-2)^2 + 12 \cdot (-2) + 4 \\ &= 3 \cdot 4 - 24 + 4 \\ &= 12 - 24 + 4 \\ &= -8 \end{aligned}$$

5. Die Scheitelpunktform: Der Scheitelpunkt ist: $(-2|-8)$
Die Scheitelpunktsform lautet dann:

$$f(x) = 3(x + 2)^2 - 8 = 3x^2 + 12x + 4$$

Zu Aufgabe: 4.4

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

1. Ableitung:

$$\begin{aligned} f(x) &= ax^2 + bx + c \\ f'(x) &= 2ax + b \\ f''(x) &= 2a \end{aligned}$$

2. notwendige Bedingung: $f'(x) = 0$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 0 \\ 2ax + b &= 0 \\ 2ax &= -b \\ x &= -\frac{b}{2a} \end{aligned}$$

   Bei $x = -\frac{b}{2a}$ ist eine mögliche Extremstelle.

3. hinreichende Bedingung: $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) \neq 0$
   Mit Hilfe der 2. Ableitung:

$$f''(x) = 2a$$

$$\begin{aligned} f'\left(-\frac{b}{2a}\right) &= 0 \text{ und} \\ f''\left(-\frac{b}{2a}\right) &= 2a \end{aligned}$$

   Jetzt wollen wir noch wissen, ob die 2. Ableitung an der Stelle $-b/2a$ größer oder kleiner als null ist. Der Wert der 2. Ableitung ist immer $2a$. Also hängt das Vorzeichen der 2. Ableitung von a ab. Wenn a größer als null ist, ist es auch $2a$, Wenn a kleiner als null ist, ist es auch $2a$:

   (a) $a > 0$

$$f''\left(-\frac{b}{2a}\right) = 2a > 0$$

   Es liegt ein Minimum vor an der Stelle $x = -\frac{b}{2a}$.

   (b) $a < 0$

$$f''\left(-\frac{b}{2a}\right) = 2a < 0$$

   Es liegt ein Maximum vor an der Stelle $x = -\frac{b}{2a}$.

4. Punkte:
   Einsetzen in die Originalfunktion: $f(x)$.

$$\begin{aligned} f\left(-\frac{b}{2a}\right) &= a\left(-\frac{b}{2a}\right)^2 + b \cdot \left(-\frac{b}{2a}\right) + c \\ &= a \cdot \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{2a} + c \\ &= \frac{b^2}{4a} - \frac{2b^2}{4a} + c \\ &= -\frac{b^2}{4a} + c \end{aligned}$$

Damit ist bewiesen, dass der Scheitelpunkt von f an der Stelle $x = -\frac{b}{2a}$ mit dem y-Wert $-\frac{b^2}{4a} + c$ ist.

Bei dem Spezialfall $a = 1$ gilt:

$$f(x) = x^2 + bx + c = \left(x + \frac{b}{2}\right)^2 - \frac{b^2}{4} + c$$

Kapitel 5

Wendestelle

Bisher haben wir nur Extrempunkte untersucht. In diesem Kapitel werden wir nun auch zusätzlich Wendepunkte untersuchen.

Ese gibt verschiedene Zugänge zu Wendepunkten:

- Die Steigung wird extremal (maximal oder minimal).
- Der Graph hat einen Übergang von einer Rechtskurve in eine Linkskurve (oder umgekehrt).

Im ersten Schritt werden wir uns den Wendepunkten graphisch annähern. An einem Bergprofil verschaffen wir uns einen Überblick über die verschiedenen Punkte eines Graphen.

Dann untersuchen wir, wie Wendepunkte mathematisch bestimmt werden können.

Anschließend betrachten wir noch einen speziellen Wendepunkt, den Sattelpunkt.

Wendepunkte sind diejenigen Stellen, wo die Steigung „extrem“ wird. Also, wo die Steigung entweder ein Maximum oder ein Minimum hat.

Dies ist im Graphen der Übergang von einer Rechts- in die Linkskurve oder umgekehrt.

f hat an der Stelle x_w eine Wendestelle, wenn gilt:

1. **notwendige Bedingung:**
$$f''(x_w) = 0$$

2. **hinreichende Bedingung:**
$$f''(x_w) = 0 \text{ und } f'''(x_w) \neq 0$$

Es gibt eine Besonderheit, wenn Sie die maximale Steigung suchen. Es reicht dann nicht, wenn Sie das maximum von f' berechnen, sondern Sie müssen auch nachweisen, dass es sich um eine positive Steigung handelt. Denn wenn die Steigung ($f'(x)$) negativ wäre, dann würde es sich um eine Abnahme handeln an der Stelle.

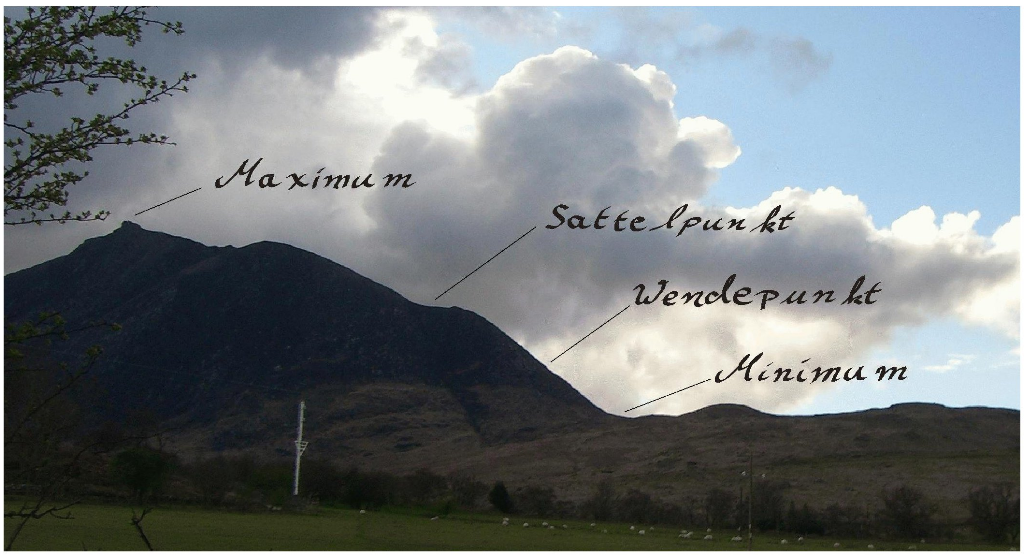


Abbildung 5.1: Ein Bergprofil. Darin eingezeichnet sind beispielhaft ein Berg (Maximum), ein Tal (Minimum), ein Punkt mit größtem Gefälle (Wendestelle) und ein Sattelpunkt.

5.1 Graphischer Zugang

In Abb. 5.1 sehen Sie in einem Bergprofil Extrempunkte, eine Wendestelle und einen Sattelpunkt eingezeichnet.

In den beiden Abb. 5.2 sehen Sie eine Funktion und ihre Ableitung. An der Stelle wo die Steigung extrem ist (hier maximal), geht der Graph der Funktion f von einer Linkskurve in eine Rechtskurve über. Stellen Sie sich dazu einen Fahrradfahrer vor, der den Graph abfährt. Erst legt er sich nach links. Dann

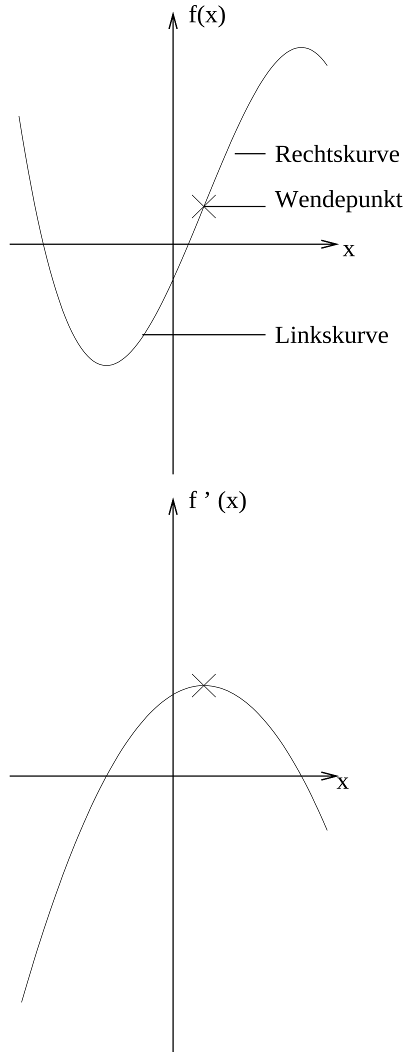


Abbildung 5.2: In den beiden Abb. sehen Sie eine Funktion und ihre Ableitung. Der Wendepunkt kennzeichnet den Punkt, wo die Linkskurve in eine Rechtskurve übergeht, bzw. die Steigung maximal ist.

nach rechts. Dazwischen ist irgendwo der Punkt, an dem er aufrecht sitzt.

5.2 Rechnerischer Zugang

Da die Wendestelle die Extremstelle der Ableitung der Originalfunktion ist, muss man ja nur diese Extremstelle der Ableitung finden.

g sei die Steigungsfunktion von f. Also gilt: $f'(x) = g(x)$

Extremstelle von $g(x)$:	Extremstelle von $f'(x)$:
$g'(x) = 0$	$f''(x) = 0$
$g''(x_0) \neq 0$	$f'''(x_0) \neq 0$

Beispiel:

$$f(x) = 2x^3 - 12x^2$$

Gesucht ist der Wendepunkt von $f(x)$:

1. Ableitungen:

$$\begin{aligned} f(x) &= 2x^3 - 12x^2 \\ f'(x) &= 6x^2 - 24x \\ f''(x) &= 12x - 24 \\ f'''(x) &= 12 \end{aligned}$$

2. Kandidaten für eine Wendestelle:

$$\begin{aligned} f''(x) &= 0 \\ 12x - 24 &= 0 \\ 12x &= 24 \\ x &= 2 \end{aligned}$$

3. Überprüfung:

$$f'''(2) = 12 \neq 0$$

4. Punkt des Graphen von f ermitteln:

$$f(2) = 2 \cdot 2^3 - 12 \cdot 2^2 = 2 \cdot 8 - 12 \cdot 4 = 16 - 48 = -32$$

   Der Wendepunkt ist bei $(2|-32)$.

5.3 Der Sattelpunkt

Ein Sattelpunkt ist ein besonderer Wendepunkt. Dort ist nämlich auch die Tangente waagerecht, also parallel zur x-Achse.

Bei einem Sattelpunkt gilt also notwendigerweise:

$$\begin{aligned} f'(x_p) &= 0 \\ f''(x_p) &= 0 \end{aligned}$$

Damit die Wendestelle (oder hier dann der Sattelpunkt) auch tatsächlich nachgewiesen ist, müssen Sie entweder das Vorzeichenkriterium auf $f''(x_p)$ anwenden, oder es muss gelten, dass die dritte Ableitung ungleich null ist an der Stelle:

$$f'''(x_p) \neq 0$$

Kapitel 6

Integral als Umkehrung des Differenzierens

In diesem Kapitel wird das Integral nur als Umkehrung des Differenzierens eingeführt. Dies entspricht nicht dem mathematischen Weg!

Zuerst wird untersucht, wie man das Differenzieren von Polynomen umkehrt. Daran anschließend werden zwei wichtige Anwendungen untersucht:

- Das Integral der Geschwindigkeit.
- Das Integral einer Durchflussgeschwindigkeit.

Erst in einem späteren Kapitel wird das Integral als Fläche unter einer Kurve hergeleitet und damit der Bezug zum Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung gewonnen.

6.1 Das Geschwindigkeitsmodell

Im Geschwindigkeitsmodell gilt folgender Zusammenhang:

- f: Weg-Zeit
- f': Geschwindigkeit
- f": Beschleunigung

Wenn also die Geschwindigkeit eines Autos gegeben ist: z.B.: $v(t) = 3\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$, dann errechnet man den zurückgelegten Weg, indem man von $v(x)$ die Umkehrung des Differenzierens also das Integral bildet.

$$v(t) = 3$$
$$s(t) = 3t$$

Die Integration bildet erfahrungsgemäß Schwierigkeiten. $s(t)$ ist hier eine lineare Funktion mit der Steigung 3.

Aber ebenso hätte die Funktion auch

$$s(t) = 3t + 10$$

lauten können. Auch hier ist die Ableitung: $s'(t) = 3$.

Durch die Angabe der Geschwindigkeit ist noch nicht gesagt, wie weit das Auto tatsächlich weg ist, weil nicht über dem Startpunkt gesagt wurde.

Oder anders:
Durch die Angabe der Steigung an jedem Ort weiß man nicht, wie hoch die einzelnen Orte sind. Eine hohe Steigung in einem Landschaftsprofil kann eine Kletterwand in Holland unter dem Meeresspiegel sein oder in den Alpen eine Steilwand beschreiben.

Das Integral ist bis auf eine Konstante unbestimmt:

$$s(t) = 3t + c$$

c nennt man die Integrationskonstante.

	Funktion	Bedeutung	Einheit	
Differenzieren ↓	$s(t)$	Entfernungsfunktion / Mengenfunktion	km, l, Anzahl	Integrieren ↑
	$v(t)$	Geschwindigkeit / Durchflussmenge	km/h, l/h, Anzahl/h	
	$a(t)$	Beschleunigung	km/h^2	

6.2 Aufgaben

Aufgabe 6.1
Geben Sie die Stammfunktionen folgender Funktionen an:

$$f_1(x) = 6x^2 + 1$$
$$f_2(x) = 20x^4 + 4x + 5$$
$$f_3(x) = x^2 - 6x + 5$$

(Lösung siehe Seite 60).

Aufgabe 6.2
Geben Sie die Stammfunktionen folgender Funktionen an:

$$f_1(x) = x^2 + x$$
$$f_2(x) = x^4 + 6x + 5$$
$$f_3(x) = 5x^2 - 2x + 5$$

(Lösung siehe Seite 60).

Aufgabe 6.3
Das Verkehrsaufkommen in einem Tunnel ist gegeben durch:

$$f(t) = t^3 - 40t^2 + 384t$$

1. Geben Sie an, wann keine Autos fahren.
2. Bestimmen Sie eine Funktion, mit der Sie die Anzahl der Autos, welche zwischen 0 und t gefahren sind angeben.

   Um 0 Uhr fahren keine Autos in den Tunnel.

(Lösung siehe Seite 60).

Aufgabe 6.4
Die Beschleunigung eines fallenden Steines sei gegeben durch:

$$f(t) = 9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$$

1. Bestimmen Sie die Geschwindigkeit des Steines nach 10 s.
2. Bestimmen Sie den zurückgelegten Weg nach 10 s. Der Stein wird beim Beobachter losgelassen.

(Lösung siehe Seite 61).

6.3 Lösungen

Zu Aufgabe: 6.1

$$\begin{aligned} f_1(x) &= 6x^2 + 1 \\ F_1(x) &= 2x^3 + x + c \\ f_2(x) &= 20x^4 + 4x + 5 \\ F_2(x) &= 4x^5 + 2x^2 + 5x + c \\ f_3(x) &= x^2 - 6x + 5 \\ F_3(x) &= \frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 5x + c \end{aligned}$$

Zu Aufgabe: 6.2

$$\begin{aligned} f_1(x) &= x^2 + x \\ F_1(x) &= \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + c \\ f_2(x) &= x^4 + 6x + 5 \\ F_2(x) &= \frac{1}{5}x^5 + 3x^2 + 5x + c \\ f_3(x) &= 5x^2 - 2x + 5 \\ F_3(x) &= \frac{5}{3}x^3 - x^2 + 5x + c \end{aligned}$$

Zu Aufgabe: 6.3
Das Verkehrsaufkommen in einem Tunnel ist gegeben durch:

$$f(t) = t^3 - 40t^2 + 384t$$

1. Geben Sie an, wann keine Autos fahren.

   Wenn kein Verkehrsaufkommen da ist, dann ist es null:

$$\begin{aligned} t^3 - 40t^2 + 384t &= 0 \\ t(t^2 - 40t + 384) &= 0 \end{aligned}$$

$$t = 0 \text{ oder } t^2 - 40t + 384 = 0$$

$$\begin{aligned} t^2 - 40t + 384 &= 0 \\ t^2 - 40t &= -384 \\ (t-20)^2 &= -384 + 400 \\ (t-20)^2 &= 16 \\ t - 20 = -4 \text{ oder } t - 20 &= 4 \\ t = 16 \text{ oder } t &= 24 \end{aligned}$$

Um 0 Uhr, um 16 Uhr und um 24 Uhr gibt es kein Verkehrsaufkommen.

Wenn man so will, wird da der Tunnel geschlossen und dann fahren die Autos in die andere Richtung.

2. Bestimmen Sie eine Funktion, mit der Sie die Anzahl der Autos, welche zwischen 0 und t gefahren sind, angeben.

   Um 0 Uhr fahren keine Autos in den Tunnel.

$$F(t) = \frac{1}{4}t^4 - \frac{40}{3}t^3 + 192t^2$$

Zu Aufgabe: 6.4
Die Beschleunigung eines fallenden Steines sei gegeben durch:

$$f(t) = 9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$$

1. Bestimmen Sie die Geschwindigkeit des Steines nach 10 s.

   Die Geschwindigkeit ist die Aufleitung der Beschleunigung:

$$v(t) = 9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot t + v_0$$

   Die 9,81 sind eine Konstante. v_0 ist die Anfangsgeschwindigkeit. t wird in Sekunden gemessen.

2. Bestimmen Sie den zurückgelegten Weg nach 10s.

   Der Weg ist die Aufleitung der Geschwindigkeit:

$$s(t) = \frac{1}{2} \cdot 9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot t^2 + v_0 t + s_0$$

   s_0 ist die Anfangsentfernung.

   Da der Stein beim Beobachter losgelassen wird, ist die Anfangsgeschwindigkeit: $v_0 = 0$ und die Anfangsentfernung $s_0 = 0$.

$$s(10) = \frac{1}{2} \cdot 9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot 10^2$$

$$\begin{aligned} s(10) &= \frac{1}{2} \cdot 9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot 10^2 \\ &= 490{,}5 \end{aligned}$$

   Der Stein ist 490,5 m weit gefallen.

6.4 Arbeitsblätter

6.5 Freier Fall

Hier soll das physikalische Beispiel des freien Falles vorgestellt werden.

Die Physiker haben auf der Erde fallende Gegenstände vermessen und dabei festgestellt, dass alle Gegenstände – bei Vernachlässigung der Luftreibung – gleich schnell fallen, bzw. beschleunigt werden.

Dies gilt natürlich nur bei kleinen Höhenunterschieden. Solange, wie die anziehenden Kräfte zwischen beiden Körpern näherungsweise gleich bleiben.

Wenn man sehr weit weg ist von der Erde, dann ist die Anziehungskraft zwischen der Erde und einem Gegenstand natürlich sehr viel kleiner geworden aufgrund des großen Abstandes.

Auch auf der Erde ist in Wirklichkeit die Erdbeschleunigung nicht überall gleich. Ob etwas auf dem Mt. Everest oder in einem Tal in Holland zu Boden fällt macht einen – kleinen – Unterschied. Der Abstand zum Schwerpunkt der Erde ist ein anderer.

Wenn etwas in einem Bergwerk fällt, wird es ebenfalls von der Masse der Decke angezogen und fällt langsamer.

Die Erdrotation sorgt ebenfalls für einen Unterschied, ob Sie am Äquator messen oder am Nordpol. Am Äquator wird der Gegenstand ein klein wenig „weggeschleudert" („Fliehkraft"). Doch diese Differenzen sind sehr gering daher nimmt man einfach das Mittel aller Messungen. In Formeln benennt man die Erdbeschleunigung mit g[1].

$$g = 9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$$

Ein Stein fällt aus einer Höhe von 60 m. Seine Anfangsgeschwindigkeit beträgt 5 m/s.

1. Bestimmen Sie die Geschwindigkeitsfunktion des Steines.

2. Bestimmen Sie die Entfernungsfunktion des Steines.

3. Geben Sie eine allgemeine Geschwindigkeitsfunktion und Entfernungsfunktion an mit folgenden Vorgaben:

Beschleunigung:	a
Anfangsgeschwindigkeit:	v_0
Anfangsentfernung:	s_0

[1] Die Benutzung von Buchstaben für Konstanten oder hier die Erdbeschleunigung hilft Ihnen in den Formeln nachvollziehen zu können, wie die Werte zustande kommen. Die Entfernung s einer beschleunigten Bewegung ist: $s = \frac{1}{2}\,g\,t^2$. Wenn Sie $\frac{1}{2}\,g$ ausrechnen zu 4,905, erkennt niemand in der Formel: $s = 4{,}905\,t^2$ den Zusammenhang zur Erdbeschleunigung.

6.6 Freier Fall – Lösung

$$g = 9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$$

Ein Stein fällt aus einer Höhe von 60 m. Seine Anfangsgeschwindigkeit beträgt 5 m/s.

1. Bestimmen Sie die Geschwindigkeitsfunktion des Steines.

   Lösung:
   Die Geschwindigkeit ist das Integral der Beschleunigung. Die Beschleunigung ist konstant, also ist die Geschwindigkeit eine lineare Funktion.

   Zur Erinnerung: Eine lineare Funktion hat immer eine konstante Steigung.

   $$v(t) = \int_0^t 9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\,dx$$

   Beachten Sie den „Variablenwechsel". Sie integrieren eine Funktion, die als Variable x hat darum dx. Der Variablenname t wird für die Grenze gebraucht. In die Stammfunktion werden die Grenzen eingesetzt und Sie erhalten eine Funktion mit der Variablen t. (siehe S.14.3)

   $$v(t) = 9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\cdot t + c$$

   Das Integral ist bestimmt bis auf die Konstante c. Dies ist aber gerade die Anfangsgeschwindigkeit. Denn:

   $$v(0) = 9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\cdot 0 + c = c$$

   Die Anfangsgeschwindigkeit ist gegeben. Also ist die gesuchte Geschwindigkeitsfunktion:

   $$v(t) = 9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\cdot t + 5\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

2. Bestimmen Sie die Entfernungsfunktion des Steines.

   Lösung:
   Im Prinzip ist die Lösung dieser Aufgabe gleich der Lösung der Aufgabe vorher. Die Entfernungsfunktion ist das Integral der Geschwindigkeitsfunktion.

   $$s(t) = \int_0^t v(x)\,dx$$

   Auch hier müssen Sie aus formalen Gründen in der Funktion v eine andere Variable als t haben.

   $$s(t) = \int_0^t 9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\cdot x + 5\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

$$s(t) = 9{,}81 \frac{1}{2} \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot t^2 + 5 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} t + c$$

Auch hier ist – wie oben – die Integrationskonstante c gegeben durch die Angabe der Anfangsentfernung.

$$s(t) = 9{,}81 \frac{1}{2} \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot t^2 + 5 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} t + 60\, m$$

3. Geben Sie eine allgemeine Geschwindigkeitsfunktion und Entfernungsfunktion an mit folgenden Vorgaben:

Beschleunigung:	a
Anfangsgeschwindigkeit:	v_0
Anfangsentfernung:	s_0

Lösung:

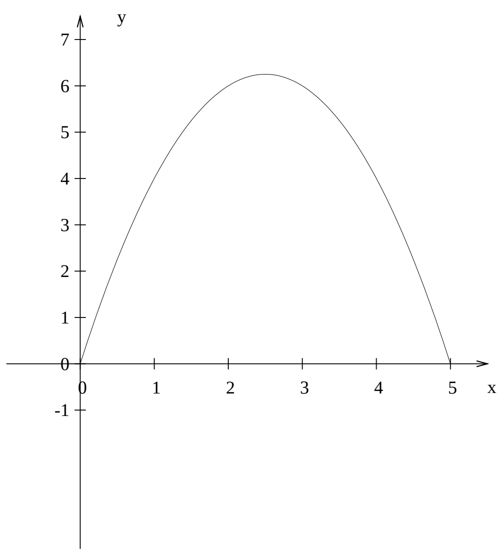
$$s(t) = \frac{1}{2} g t^2 + v_0 t + s_0$$

6.7 Geschwindigkeit

Zum Zeitpunkt $t = 0$ fährt ein Auto vom Beobachter los. Die Geschwindigkeit des Autos ist durch folgende Funktion gegeben:

$$v(t) = -t^2 + 5t$$

t ist die Zeit in Sekunden, $v(t)$ die Geschwindigkeit in m/s.



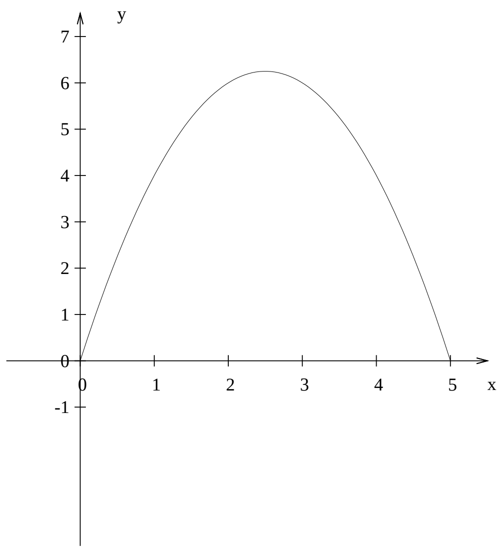
1. Bestimmen Sie die Geschwindigkeit nach 2 s.
2. Geben Sie an, wann das Auto steht.
3. Bestimmen Sie, in welchem Zeitraum das Auto vom Beobachter weg fährt.
4. Bestimmen Sie, wann das Auto die maximale Geschwindigkeit hat.
5. Welche Entfernung hat das Auto nach 3 s zurückgelegt?
6. Bestimmen Sie eine Funktion, die die Entfernung des Wagens vom Beobachter angibt.
7. Ermitteln Sie, wann das Auto die maximale Entfernung vom Beobachter hat.
8. Bestimmen Sie, wann das Auto keine Beschleunigung hat.
9. Bestimmen Sie, ab wann der Fahrer bremst.
10. Bestimmen Sie, wann der Fahrer den Beobachter wieder erreicht.
11. Erläutern Sie die Bewegung des Autos.

6.8 Geschwindigkeit – Lösung

Zum Zeitpunkt $t = 0$ fährt ein Auto vom Beobachter los. Die Geschwindigkeit des Autos ist durch folgende Funktion gegeben:

$$v(t) = -t^2 + 5t$$

t ist die Zeit in Sekunden, $v(t)$ die Geschwindigkeit in m/s.



1. Bestimmen Sie die Geschwindigkeit nach 2 s.

$$\begin{aligned} v(2) &= -2^2 + 5 \cdot 2 \\ &= -4 + 10 \\ &= 6 \end{aligned}$$

   Die Geschwindigkeit nach 2 s beträgt 6 m/s

2. Geben Sie an, wann das Auto steht.

   Das Auto steht, wenn die Geschwindigkeit 0 m/s ist.

$$\begin{aligned} v(t) &= 0 \\ -t^2 + 5t &= 0 \\ t^2 - 5t &= 0 \\ t(t-5) &= 0 \end{aligned}$$

   Zu den Zeitpunkten $t = 0$ und $t = 5$ hat das Auto keine Geschwindigkeit.

3. Bestimmen Sie, in welchem Zeitraum das Auto vom Beobachter weg fährt.

   Das Auto fährt vom Beobachter weg, wenn die Geschwindigkeit positiv ist.

   $$v(t) > 0 \quad \text{für} \quad 0 \leq t \leq 5$$

   Das Auto fährt zwischen 0 und 5 Sekunden vom Beobachter weg.

4. Bestimmen Sie, wann das Auto die maximale Geschwindigkeit hat.

   Die maximale Geschwindigkeit ist ein Extremum von $f(x)$.

   Ableitungen

   $$\begin{aligned} v(t) &= -t^2 + 5t \\ v'(t) &= -2t + 5 \\ v''(t) &= -2 \end{aligned}$$

   notwendige Bedingung: $v'(x) = 0$

   $$\begin{aligned} v'(t) &= 0 \\ -2t + 5 &= 0 \\ 5 &= 2t \\ 2{,}5 &= t \end{aligned}$$

   Bei $t = 2{,}5$ ist eine mögliche Extremstelle.
   hinreichende Bedingung:

   $$v'(2{,}5) = 0 \text{ und } v''(2{,}5) = -2 < 0$$

   $v(t)$ hat ein Maximum bei $t = 2{,}5$ Sekunden.

5. Welche Entfernung hat das Auto nach 3 s zurückgelegt?

   $$s = \int_0^3 v(t)\,dt = -\frac{1}{3}t^3 + 2{,}5t^2|_0^3 = 13{,}5$$

   Nach 3 s hat das Auto 13,5 m zurückgelegt.

6. Bestimmen Sie eine Funktion, die die Entfernung des Wagens vom Beobachter angibt.

   $$s(t) = \int_0^t v(x)\,dx = -\frac{1}{3}x^3 + 2{,}5x^2|_0^t = -\frac{1}{3}t^3 + 2{,}5t^2$$

7. Ermitteln Sie, wann das Auto die maximale Entfernung vom Beobachter hat.

   Das Auto hat die maximale Entfernung vom Beobachter nach 5 Sekunden erreicht.

- Das Auto hat ab da eine negative Geschwindigkeit, es fährt zurück.
- $v(t)$ hat eine Nullstelle und schneidet die x-Achse. Dann hat die Aufleitung von $v(t)$: $s(t)$ dort ein Maximum. Dies ist dann die maximale Entfernung.

8. Bestimmen Sie, wann das Auto keine Beschleunigung hat.

   Das Auto beschleunigt nicht, wenn sich die Geschwindigkeit nicht ändert. Die Geschwindigkeit ändert sich nicht an der Extremstelle von $v(t)$: $t = 2{,}5\,\mathrm{s}$.

9. Bestimmen Sie, ab wann der Fahrer bremst.

   Der Fahrer bremst ab dem Zeitpunkt, ab dem die Geschwindigkeit abnimmt. Dies ist der Fall ab $t = 2{,}5\,\mathrm{s}$.

10. Bestimmen Sie, wann der Fahrer den Beobachter wieder erreicht.

$$
\begin{aligned}
s(t) &= 0 \\
-\frac{1}{3}t^3 + 2{,}5t^2 &= 0 \\
t^3 - 7{,}5t^2 &= 0 \\
t^2(t - 7{,}5) &= 0 \\
t &= 0 \text{ oder } t = 7{,}5
\end{aligned}
$$

   Der Fahrer ist zu Beginn und nach 7,5 Sekunden beim Beobachter.

11. Erläutern Sie die Bewegung des Autos.

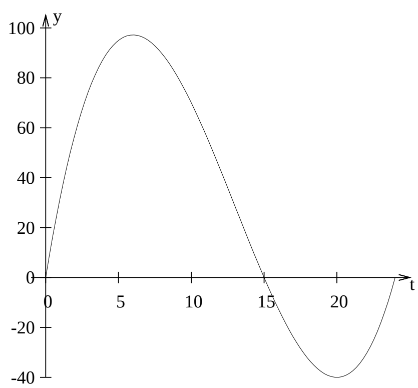
   Das Auto entfernt sich vom Beobachter bis es nach 2,5 Sekunden die größte Geschwindigkeit erreicht hat. Ab dem Zeitpunkt nimmt die Geschwindigkeit des Autos ab. Nach 5 Sekunden fährt das Auto wieder zum Beobachter mit wachsender Geschwindigkeit. Das Auto passiert den Beobachter nach 7,5 Sekunden. Es fährt ab da mit steigender Geschwindigkeit in die entgegengesetzte (negative) Richtung weiter.

6.9 Tunnel

Das Verkehrsaufkommen eines Tages bei einem Tunnel soll modelliert werden durch eine Funktion:

$$f: \text{ Zeit in Stunden } \rightarrow \text{ Verkehrsfluss in Autos pro Stunde}$$

$$f(x) = \frac{x^3 - 39x^2 + 360x}{10}$$



1. Wie viele Autos pro Stunde fahren um 5 Uhr in den Tunnel?
2. Bestimmen Sie, in welcher Zeit des Tages Autos in den Tunnel hineinfahren.
3. Bestimmen Sie die Uhrzeit, wann die meisten Autos in den Tunnel hineinfahren.
4. Geben Sie den Zeitpunkt der größten Verkehrsdichte an.
5. Bestimmen Sie eine Funktion, die die Menge der Autos für den Tag bis zu einer bestimmten Uhrzeit angibt:

   $$\text{Zeit in Stunden } \rightarrow \text{ Menge der Autos}$$

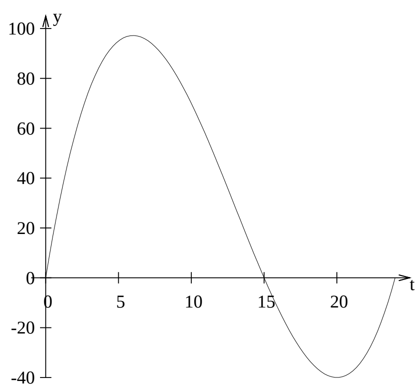
   Um 1 Uhr sind 60 Autos insgesamt durch den Tunnel gefahren.
6. Ermitteln Sie, wieviele Autos zwischen 3 und 5 Uhr morgens durch den Tunnel gefahren sind.

6.10 Tunnel – Lösung

Das Verkehrsaufkommen eines Tages bei einem Tunnel soll modelliert werden durch eine Funktion:

$$f: \text{ Zeit in Stunden } \rightarrow \text{ Verkehrsfluss in Autos pro Stunde}$$

$$f(x) = \frac{x^3 - 39x^2 + 360x}{10}$$



1. Wie viele Autos pro Stunde fahren um 5 Uhr in den Tunnel?

$$f(5) = 95$$

   95 Autos fahren um 5 Uhr in den Tunnel.

2. Bestimmen Sie, in welcher Zeit des Tages Autos in den Tunnel hineinfahren.

$$\frac{x^3 - 39x^2 + 360x}{10} = 0$$
$$x^3 - 39x^2 + 360x = 0$$
$$x(x^2 - 39x + 360) = 0$$

$$x = 0 \quad \text{oder} \quad x^2 - 39x + 360 = 0$$

$$x^2 - 39x + 360 = 0$$
$$x = 15 \text{ oder } x = 24$$

Zwischen 0 und 15 Uhr fahren die Autos in den Tunnel. Zwischen 15 und 24 Uhr fahren die Autos aus dem Tunnel heraus.

Es herrscht also ein Einbahnbetrieb vor.

3. Bestimmen Sie die Uhrzeit, wann die meisten Autos in den Tunnel hineinfahren.

   (a) **Ableitungen**

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x^3 - 39x^2 + 360x}{10} \\ f'(x) &= \frac{3x^2 - 78x + 360}{10} \\ f''(x) &= \frac{6x - 78}{10} \end{aligned}$$

   (b) **notwendige Bedingung:** $f'(x) = 0$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 0 \\ \frac{3x^2 - 78x + 360}{10} &= 0 \\ 3x^2 - 78x + 360 &= 0 \\ x^2 - 26x + 120 &= 0 \\ x^2 - 26x &= -120 \\ (x - 13)^2 &= -120 + 169 \\ (x - 13)^2 &= 49 \\ x - 13 = -7 &\text{ oder } x - 13 = 7 \\ x = 6 &\text{ oder } x = 20 \end{aligned}$$

   Mögliche Extremstellen sind $x = 6$ und $x = 20$.

   (c) **hinreichende Bedingung:** $f'(x_0) = 0$ **und** $f''(x_0) \neq 0$

$$\begin{aligned} f'(6) &= 0 \text{ und} \\ f''(6) &= -42 < 0 \\ f'(20) &= 0 \text{ und} \\ f''(20) &= 42 > 0 \end{aligned}$$

   Bei $x = 6$ ist ein Maximum vorhanden.
   Bei $x = 20$ ist ein Minimum vorhanden.

4. Geben Sie den Zeitpunkt der größten Verkehrsdichte an.

   Das ist dieselbe Frage wie oben. Wann fahren die meisten Autos?

5. Bestimmen Sie eine Funktion, die die Menge der Autos für den Tag bis zu einer bestimmten Uhrzeit angibt:

   $$\text{Zeit in Stunden} \rightarrow \text{Menge der Autos}$$

   Um 1 Uhr sind 60 Autos insgesamt durch den Tunnel gefahren.

   $$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{10}x^3 - \frac{39}{10}x^2 + 36x \\ F(x) &= \frac{1}{40}x^4 - \frac{13}{10}x^3 + 18x^2 + c \\ F(1) &= 60 \\ 60 &= \frac{1}{40} \cdot 1^4 - \frac{13}{10} \cdot 1^3 + 18 \cdot 1^2 + c \\ &= 16{,}725 + c \\ c &= 43{,}275 \end{aligned}$$

   $$F(x) = \frac{1}{40}x^4 - \frac{13}{10}x^3 + 18x^2 + 43{,}275$$

6. Ermitteln Sie, wieviele Autos zwischen 3 und 5 Uhr morgens durch den Tunnel gefahren sind.

   $F(5)$ gibt an, wieviele Autos zwischen 0 und 5 Uhr in den Tunnel gefahren sind.

   $$\begin{aligned} F(5) &= 346{,}4 \\ F(3) &= 172{,}2 \\ F(5) - F(3) &= 174{,}2 \end{aligned}$$

   Da es keine halben Autos gibt ... Es sind zwischen 3 und 5 Uhr 174 Autos durch den Tunnel gefahren.

Kapitel 7

Überblick

7.1 Überblick über die 1. Ableitung

Bedeutungsbeispiele:

1. Die 1. Ableitung gibt die Geschwindigkeit von f an. (Durchflussgeschwindigkeit, Geschwindigkeit, wenn f die Entfernung angibt).

2. Die 1. Ableitung gibt die Steigung an.

3. Wenn f die Kosten angibt, sind f' die Grenzkosten.

   (a) Grenzkosten sind die Kosten, die man mehr hat, wenn man ein Produkt mehr herstellt.

   (b) Die Steuer, die man mehr zahlt, wenn man einen Euro mehr verdient.

4. Am lokalen Extrempunkt (Berggipfel, Talsohle) ist die 1. Ableitung gleich null. Die 2. Ableitung muss dann ungleich null sein.

5. Am Sattelpunkt ist die 1. Ableitung null, die 2. Ableitung ebenfalls und die 3. Ableitung ungleich null.

7.2 Überblick über die 2. Ableitung

Bedeutungsbeispiele:

1. Die 2. Ableitung gibt die Beschleunigung von f an.

2. Die 2. Ableitung ist ein Maß für die Krümmung.

3. Die 2. Ableitung ist null bei der Wendestelle.

4. An der Wendestelle gilt:

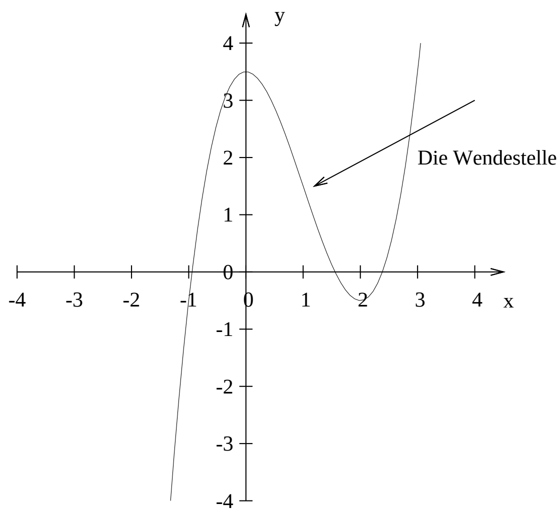
(a) $f''(x) = 0$ **und** $f'''(x) \neq 0$.

(b) Die Funktion f geht von einer Rechtskurve in eine Linkskurve oder umgekehrt.

(c) An der Wendestelle hat die Steigung (1. Ableitung) eine Extremstelle. $f''(x) = 0$ **und** $f'''(x) \neq 0$.

(d) Insbesondere ist die Krümmung am Wendepunkt null.

5. Am Sattelpunkt ist die 1. Ableitung null, die 2. Ableitung ebenfalls und die 3. Ableitung ungleich null.



7.3 Überblick über das Integral

Bedeutungsbeispiele:

1. Das Integral gibt die Fläche an unter der $f(x)$.
   Achtung: Flächen unterhalb der x-Achse zählen negativ.

2. Das Integral über der Durchflussgeschwindigkeit von a nach b gibt die Mengenänderung zwischen den Zeiten a und b an.

   Die absolute Menge kann man nur bestimmen, wenn man einen Mengenwert zu einem Zeitpunkt kennt.

3. Der Mittelwert von f zwischen a und b:

$$mw = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\, dx$$

4. Die Bogenlänge kann berechnet werden:

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx$$

Kapitel 8

Aufgaben I

8.1 Der Karton

Bei dieser Aufgabe geht es darum einen quaderförmigen Kasten zu optimieren. Er soll das größtmögliche Volumen haben. Der Kasten wird aus einem rechteckigen Stück Karton (60 cm x 30 cm) hergestellt. An den Ecken wird dazu jeweils ein quadratisches Stück herausgeschnitten (x). Dann werden die Kanten entsprechend hochgeklappt. Der Kasten ist oben offen.
Wie groß muss x sein, damit der Kasten das größtmögliche Volumen hat?

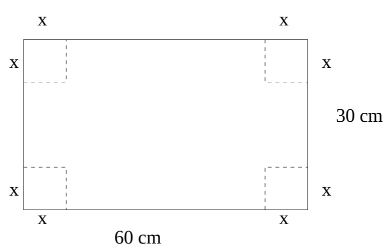


Abbildung 8.1: Ein Kartonschnittmuster.

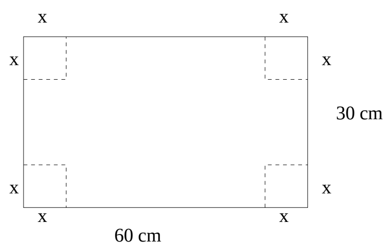
1. Welche Werte darf x annehmen (Definitionsbereich)?
2. Bestimmen Sie die Werte:

x:	0 cm	15 cm	1 cm	2 cm	x
Breite:					
Länge:					
Höhe:					
Volumen:			1624 cm^3		

3. Bestimmen Sie von der Funktion das Maximum.
4. Wie groß ist das maximale Volumen des Quaders?

8.2 Der Karton – Lösung

Bei dieser Aufgabe geht es darum einen quaderförmigen Kasten zu optimieren. Er soll das größtmögliche Volumen haben. Der Kasten wird aus einem rechteckigen Stück Karton (60 cm x 30 cm) hergestellt. An den Ecken wird dazu jeweils ein quadratisches Stück herausgeschnitten (x). Dann werden die Kanten entsprechend hochgeklappt. Der Kasten ist oben offen.
Wie groß muss x sein, damit der Kasten das größtmögliche Volumen hat?



1. Welche Werte darf x annehmen (Definitionsbereich)?
   x darf alle Zahlen sein, mit der Einschränkung: x kann nicht kleiner als 0 sein und darf nicht größer als 15 sein:

$$\mathbb{D}_x = \{x \in \mathbb{R} \,|\, 0 \leq x \leq 15\}$$

2. Bestimmen Sie die Werte:

x:	0 cm	15 cm	1 cm	2 cm	x
Breite:	30 cm	0 cm	28 cm	26 cm	30 - $2x$
Länge:	60 cm	30 cm	58 cm	56 cm	60 - $2x$
Höhe:	0 cm	0 cm	1 cm	2 cm	x
Volumen:	0 cm^3	0 cm^3	1624 cm^3	2912 cm^3	$(30-2x)(60-2x)x$

3. Bestimmen Sie von der Funktion das Maximum.

$$\begin{aligned} V(x) &= (30-2x)(60-2x)x \\ &= (1800-60x-120x+4x^2)x \\ &= 4x^3-180x^2+1800x \\ V'(x) &= 12x^2-360x+1800 \\ V''(x) &= 24x-360 \end{aligned}$$

notwendige Bedingung: $V'(x)=0$

$$\begin{aligned} V'(x) &= 0 \\ 12x^2-360x+1800 &= 0 \\ x^2-30x+150 &= 0 \\ (x-15)^2 &= -150+15^2 \\ (x-15)^2 &= 75 \\ x-15 &= \pm\sqrt{75} \\ x &= 15\pm\sqrt{75} \end{aligned}$$

$x=15+\sqrt{75}$ liegt ausserhalb des Definitionsbereiches.
Bei $x=15-\sqrt{75}$ liegt eine mögliche Extremstelle vor.

hinreichende Bedingung Es gibt zwei Möglichkeiten:

(a) **Alternative 1:** $V'(x)=0$ **und das Vorzeichenkriterium**

$$\begin{aligned} 15+\sqrt{75} &\approx 23,6 \\ 15-\sqrt{75} &\approx 6,3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V'(15-\sqrt{75}) &= 0 \text{ und} \\ V'(15+\sqrt{75}) &= 0 \text{ und} \\ V'(0) &= 1800 > 0 \\ V'(10) &= 1200-3600+1800 < 0 \\ V'(25) &= 12\cdot 25^2-360\cdot 25+1800 = 300 > 0 \end{aligned}$$

Es liegt bei $15-\sqrt{75}$ ein Vorzeichenwechsel von „+“ nach „-“ vor.
Es handelt sich also um ein Maximum.
Es liegt bei $15+\sqrt{75}$ ein Vorzeichenwechsel von „-“ nach „+“ vor.
Es handelt sich also um ein Minimum.

(b) **Alternative 2:** $V'(x) = 0$ **und die 2. Ableitung benutzen**

$$\begin{aligned}
V'(15-\sqrt{75}) &= 0 \text{ und} \\
V''(15-\sqrt{75}) &= 12\cdot(15-\sqrt{75})^2 - 360\cdot 15 - \sqrt{75} + 1800 < 0 \\
V'(15+\sqrt{75}) &= 0 \text{ und} \\
V''(15+\sqrt{75}) &= 12\cdot(15+\sqrt{75})^2 - 360\cdot 15 + \sqrt{75} + 1800 > 0
\end{aligned}$$

Es liegt bei $x = 15 - \sqrt{75}$ ein Maximum vor.

4. Wie groß ist das maximale Volumen des Quaders?
Das Volumen ist maximal, wenn $15 - \sqrt{75}$ an jeder Ecke entfernt werden.
Das maximale Volumen beträgt:

$$\begin{aligned}
V(x) &= (30-2x)(60-2x)x \\
V(15-\sqrt{75}) &= (30-2(15-\sqrt{75}))(60-2(15-\sqrt{75})(15-\sqrt{75}) \\
V(15-\sqrt{75}) &= (2\sqrt{75})(30+2\sqrt{75})(15-\sqrt{75}) \\
V(15-\sqrt{75}) &= (60\sqrt{75}+4\cdot 75)(15-\sqrt{75}) \\
V(15-\sqrt{75}) &= (60\sqrt{75}+300)(15-\sqrt{75}) \\
V(15-\sqrt{75}) &= 900\sqrt{75}+4500-60\cdot 75-300\sqrt{75} \\
V(15-\sqrt{75}) &= 600\sqrt{75} \\
V(15-\sqrt{75}) &\approx 5196
\end{aligned}$$

Das Volumen ist ca. 5.196 cm^3.

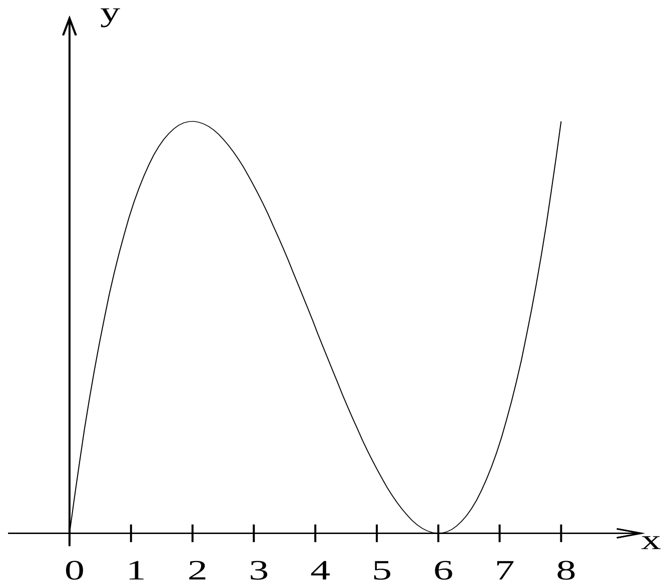


Abbildung 8.2: Ein Bergprofil.

8.3 Bergprofil

Ein Bergprofil (siehe Abb. 8.2 wird beschrieben im Intervall [0:8] durch folgende Funktion:

$$f(x) = x^3 - 12x^2 + 36x$$

Auf der x-Achse entspricht eine Einheit 500 m.
Auf der y-Achse entspricht eine Einheit 10 m. Der Meeresspiegel liegt auf der Nulllinie.

1. Bestimmen Sie die Höhe des Bergprofils an seinen Rändern.

2. Bestimmen Sie, an welchen Orten die Höhe dem Meeresspiegel entspricht.

3. Bestimmen Sie Ort und Höhe des Gipfels und des Tals.

4. Bestimmen Sie den Abstand zwischen dem Gipfel und dem Tal, sowie den Höhenunterschied.

5. An welcher Stelle ist zwischen dem Gipfel und dem Tal das größte Gefälle?

6. Zwischen dem Berg und dem Tal soll eine Seilbahn errichtet werden. Die Steigung soll niemals mehr als 15 Prozent betragen.

   Ist eine solche Seilbahn überhaupt realisierbar?

8.4 Bergprofil – Lösung

Ein Bergprofil wird beschrieben im Intervall [0:8] durch folgende Funktion:

$$f(x) = x^3 - 12x^2 + 36x$$

Auf der x-Achse entspricht eine Einheit 500 m.
Auf der y-Achse entspricht eine Einheit 10 m über dem Meeresspiegel.

1. Bestimmen Sie die Höhe des Bergprofils an seinen Rändern.

$$f(0) = 0$$
$$f(8) = 32$$

Zu Beginn ist der Berg in Meereshöhe. Am anderen Rand in 4 km Entfernung ist der Berg 320 m hoch.

2. Bestimmen Sie, an welchen Orten die Höhe dem Meeresspiegel entspricht.

$$x^3 - 12x^2 + 36x = 0$$
$$x(x^2 - 12x + 36) = 0$$

Ein Produkt ist null, wenn einer der Faktoren null ist:

(a) Entweder ist x null
(b) oder $(x^2 - 12x + 36) = 0$.

$$\begin{aligned} x^2 - 12x + 36 &= 0 \\ x^2 - 12x &= -36 \\ (x-6)^2 &= -36 + 36 \\ (x-6)^2 &= 0 \\ x - 6 &= 0 \quad \text{Ausnahmsweise nur eine Lösung} \\ x &= 6 \end{aligned}$$

Nach 3 km ist wieder die Meereshöhe erreicht.

3. Bestimmen Sie Ort und Höhe des Gipfels und des Tals.

Lösung
Gesucht sind die Extremstellen.

(a) Ableitungen:

$$f'(x) = 3x^2 - 24x + 36$$
$$f''(x) = 6x - 24$$

(b) notwendige Bedingung: $f'(x) = 0$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 0 \\ 3x^2 - 24x + 36 &= 0 \\ x = 2 \quad od. \quad x &= 6 \end{aligned}$$

Bei $x = 2$ und bei $x = 6$ sind mögliche Extremstellen.

(c) hinreichende Bedingung: $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) \neq 0$

$$\begin{aligned} &f'(2) = 0 \text{ und} \\ &f''(2) = -12 < 0 \Rightarrow \text{Maximum} \\ &f'(6) = 0 \text{ und} \\ &f''(6) = 12 > 0 \Rightarrow \text{Minimum} \end{aligned}$$

(d)

$$\begin{aligned} f(2) &= 32 \\ f(6) &= 0 \end{aligned}$$

Der Gipfel ist nach 1000 m 320 m hoch.
Das Tal ist nach 3000 m 0 m hoch.

4. Bestimmen Sie den Abstand zwischen dem Gipfel und dem Tal, sowie den Höhenunterschied.

   Lösung
   Der Abstand zwischen dem Gipfel und dem Tal beträgt 2000 m und der Höhenunterschied beträgt 320 m.

5. An welcher Stelle ist zwischen dem Gipfel und dem Tal das größte Gefälle?

   Lösung
   Gesucht ist die Wendestelle von $f(x)$.

   (a) Ableitungen:

$$\begin{aligned} f''(x) &= 6x - 24 \\ f'''(x) &= 6 \end{aligned}$$

   (b) notwendige Bedingung: $f''(x) = 0$

$$\begin{aligned} 6x - 24 &= 0 \\ x &= 4 \end{aligned}$$

   Bei $x = 4$ ist eine mögliche Wendestelle.

(c) hinreichende Bedingung: $f''(x_0) = 0$ und $f'''(x_0) \neq 0$

$$f''(4) = 0 \text{ und } f'''(4) = 6 \neq 0$$

(d)

$$f(4) = 16$$

Das größte Gefälle ist nach 2000 m genau in der Mitte zwischen Berggipfel und Tal in einer Meereshöhe von 160 m.

6. Zwischen dem Berg und dem Tal soll eine Seilbahn errichtet werden. Die Steigung soll niemals mehr als 15 Prozent betragen.

   Ist eine solche Seilbahn überhaupt realisierbar?

   Lösung
   Die minimalste Steigung wird durch eine Gerade realisiert.

   Die Steigung beträgt 320 Höhenmeter auf 2000 m Luftlinie.

$$\frac{320}{2000} = \frac{16}{100} = 16\%$$

   Diese geforderte Seilbahn ist nicht realisierbar.

8.5 Vase und Halterung

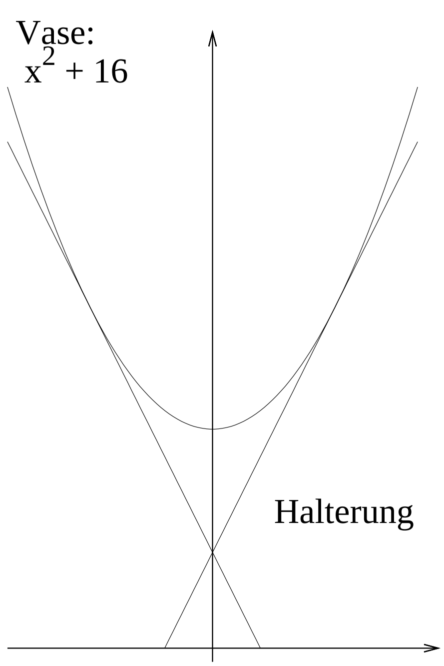
Gegeben ist eine parabelförmige Vase, die durch die Funktion f beschrieben wird:

$$f(x) = x^2 + 16$$

1. Zuerst soll eine Halterung an der Stelle bei $x = 3$ angebracht werden.
   (a) Bestimmen Sie die Funktionsvorschrift für die Halterung (Tangente), die die Vase an der Stelle $x = 3$ berührt.
   (b) Geben Sie an, wo die Halterung im Boden verankert werden muss.
   (c) Geben Sie den Winkel an, mit dem die Halterung den Boden schneidet.
   (d) Geben Sie die Funktionsvorschrift für die Halterung an, die die Vase an der Stelle $x = -3$ berührt.
2. Überlegt wird, eine andere Halterung einzubauen:

$$g(x) = 8x$$

   Wo berührt diese Halterung die Vase?



8.6 Vase und Halterung – Lösung

Gegeben ist eine parabelförmige Vase, die durch die Funktion f beschrieben wird:

$$f(x) = x^2 + 16$$

1. Zuerst soll eine Halterung an der Stelle bei $x = 3$ angebracht werden.

   (a) Bestimmen Sie die Funktionsvorschrift für die Halterung (Tangente), die die Vase an der Stelle $x = 3$ berührt.
   Lösung
   Die Halterung berührt die Vase an folgendem y-Wert:

   $$f(3) = 3^2 + 16 = 25$$

   Die Halterung berührt die Vase im Punkt $(3 \mid 25)$.
   Die Steigung der Halterung (Tangente) wird durch die 1. Ableitung angegeben:

   $$\begin{aligned} f'(x) &= 2x \\ f'(3) &= 2 \cdot 3 = 6 \end{aligned}$$

   Es ist eine Gerade gesucht, die die Steigung $m = 6$ hat und durch den Punkt $(3|25)$ geht:

   $$\begin{aligned} m \cdot x + b &= y \\ T(3) &= 25 \\ 6 \cdot 3 + b &= 25 \\ 18 + b &= 25 \\ b &= 7 \end{aligned}$$

   $$T(x) = 6x + 7$$

   (b) Geben Sie an, wo die Halterung im Boden verankert werden muss.
   Lösung
   Gesucht ist die Nullstelle der Tangente:

   $$\begin{aligned} 6x + 7 &= 0 \\ 6x &= -7 \\ x &= \frac{-7}{6} \end{aligned}$$

   (c) Geben Sie den Winkel an, mit dem die Halterung den Boden schneidet.
   Lösung

   $$\begin{aligned} \tan(\alpha) &= 6 \\ \alpha &= \tan^{-1}(6) \\ \alpha &= 80{,}5^\circ \end{aligned}$$

(d) Geben Sie die Funktionsvorschrift für die Halterung an, die die Vase an der Stelle $x = -3$ berührt.

Lösung
Da die Vase achsensymmetrisch ist, geht die Tangente durch den Punkt (-3|25) und hat dann die Steigung -6:

$$T_2(x) = -6x + 7$$

2. Überlegt wird, eine andere Halterung einzubauen:

$$g(x) = 8x$$

Wo berührt diese Halterung die Vase?

Lösung
Wann ist die Steigung der Vase 8?

$$\begin{aligned} 2x &= 8 \\ x &= 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(4) &= 4^2 + 16 = 32 \\ g(4) &= 8 \cdot 4 = 32 \end{aligned}$$

Sowohl die Halterung als auch die Vase gehen durch den Punkt (4|32) und haben dort beide jeweils die Steigung 8.

8.7 Abfluss

Die Wassermenge, die pro Stunde in Liter aus einem Abfluss fließt, lässt sich durch folgende Funktion beschreiben:

$$f_t(x) = -x^2 + tx \qquad t \in \mathbb{R}, t > 0$$

x ist die Uhrzeit.

1. Bestimmen Sie, wieviel Wasser pro Stunde um 1 Uhr für f_8 fließen.
2. Bestimmen Sie in Abhängigkeit von t, wann kein Wasser fließt.
3. Bestimmen Sie in Abhängigkeit von t, wann das meiste Wasser fließt.
4. Bestimmen Sie für $t = 8$, wieviel Wasser zwischen 1 Uhr und 2 Uhr geflossen sind.
5. Bestimmen Sie für $t = 8$ eine Mengenfunktion für das Becken, wenn um 1 Uhr 100 Liter im Becken vorhanden sind.
6. Die Messdauer soll eine Stunde betragen. Bestimmen Sie für $t = 8$, wann in dieser Stunde 5 Liter geflossen sind.
7. Bestimmen Sie wie groß t sein muss, damit zwischen 1 Uhr und 2 Uhr 4 Liter fließen?

8.8 Abfluss – Lösung

Die Wassermenge, die pro Stunde in Liter aus einem Abfluss fließt, lässt sich durch folgende Funktion beschreiben:

$$f_t(x) = -x^2 + tx \qquad t \in \mathbb{R}, t > 0$$

x ist die Uhrzeit.

1. Bestimmen Sie, wieviel Wasser pro Stunde um 1 Uhr für f_8 fließen.
   Lösung:
   $$f_8(1) = -(1)^2 + 8 \cdot 1 = -1 + 8 = 7$$
   Es fließen um 1 Uhr 7 Liter pro Stunde.

2. Bestimmen Sie in Abhängigkeit von t, wann kein Wasser fließt.
   Lösung:
   $$\begin{aligned} -x^2 + tx &= 0 \\ x(x - t) &= 0 \end{aligned}$$
   Es fließt kein Wasser zu Beginn und nach t Stunden.

3. Bestimmen Sie in Abhängigkeit von t, wann das meiste Wasser fließt.
   Lösung:
   (a) Ableitungen:
   $$\begin{aligned} f'(x) &= -2x + t \\ f''(x) &= -2 \end{aligned}$$
   (b) notwendige Bedingung: $f'(x) = 0$
   $$\begin{aligned} f'(x) &= 0 \\ -2x + t &= 0 \\ x &= 0{,}5t \end{aligned}$$
   Bei $x = 0{,}5t$ ist eine mögliche Extremstelle.
   (c) hinreichende Bedingung: $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) \neq 0$
   $$f'(0{,}5t) \text{ und } f''(0{,}5t) = -2 < 0$$
   Das bedeutet, das bei $0{,}5t$ ein Maximum vorliegt.

   Nach 0,5t Stunden fließt das meiste Wasser.

4. Bestimmen Sie für $t = 8$, wieviel Wasser zwischen 1 Uhr und 2 Uhr geflossen sind.

   Lösung:

$$\int_1^2 f_8(x)\,dx = \int_1^2 -x^2 + 8x\,dx$$
$$= -\frac{1}{3}x^3 + 4x^2\Big|_1^2$$

$$F(x) = -1/3x^3 + 4x^2$$
$$F(2) = -\frac{8}{3} + 16 = \frac{40}{3}$$
$$F(1) = -\frac{1}{3} + 4 = \frac{11}{3}$$

$$\int_1^2 f_8(x)\,dx = F(2) - F(1) = \frac{29}{3}$$

5. Bestimmen Sie für $t = 8$ eine Mengenfunktion für das Becken, wenn um 1 Uhr 100 Liter im Becken vorhanden sind.

   Lösung:

$$F(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 4x^2 + c$$
$$F(1) = 100$$
$$F(1) = -\frac{1}{3} + 4 + c$$
$$\frac{1}{3} + 4 + c = 100$$
$$c = 96\frac{1}{3}$$

$$F(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 4x^2 + 96{,}3$$

6. Die Messdauer soll eine Stunde betragen. Bestimmen Sie für $t = 8$, wann in dieser Stunde 5 Liter geflossen sind.

   Lösung: Die gesuchte Uhrzeit sei: a.

$$\int_a^{a+1} f_8(x)\,dx = 5$$

$$\int_a^{a+1} f_8(x)\,dx = F_8(a+1) - F_8(a) = 5$$

$$F_8(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 4x^2$$

$$F_8(a+1) = -\frac{1}{3}(a+1)^3 + 4(a+1)^2$$

$$F_8(a+1) = -\frac{1}{3}(a^3 + 3a^2 + 3a + 1) + 4(a^2 + 2a + 1)$$

$$F_8(a+1) = -\frac{1}{3}a^3 - a^2 - a - \frac{1}{3} + 4a^2 + 8a + 4$$

$$F_8(a) = -\frac{1}{3}a^3 + 4a^2$$

$$F_8(a+1) - F_8(a) = 5$$

$$-\frac{1}{3}a^3 - a^2 - a - \frac{1}{3} + 4a^2 + 8a + 4 + \frac{1}{3}a^3 - 4a^2 = 5$$

$$-a^2 - a - \frac{1}{3} + 8a + 4 = 5$$

$$-a^2 + 7a + \frac{11}{3} = 5$$

$$-a^2 + 7a - \frac{4}{3} = 0$$

$$a = 0{,}2 \qquad \text{oder} \qquad a = 6{,}8$$

Zwischen 0,2 und 1,2 Uhr fließen 5 Liter und zwischen 6,8 Uhr und 7,8 Uhr fließen 5 Liter.

7. Bestimmen Sie wie groß t sein muss, damit zwischen 1 Uhr und 2 Uhr 4 Liter fließen?

   Lösung:

$$\int_1^2 f_t(x)\,dx = 4$$

$$F_t(x) = -\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}tx^2$$

$$F_t(2) = -\frac{1}{3}2^3 + \frac{1}{2}t2^2 = -\frac{8}{3} + 2t$$

$$F_t(1) = -\frac{1}{3}1^3 + \frac{1}{2}t1^2 = -\frac{1}{3} + \frac{1}{2}t$$

$$\int_1^2 f_t(x)\,dx = 4$$

$$F_t(2) - F_t(1) = 4$$

$$-\frac{8}{3} + 2t + \frac{1}{3} - \frac{1}{2}t = 4$$

$$-\frac{7}{3}+\frac{3}{2}t=4$$
$$\frac{3}{2}t=\frac{19}{3}$$
$$t=\frac{38}{9}$$

Kapitel 9

Aufgaben zur Geometrie

9.1 Der Dachstuhl

Gegeben ist ein Giebeldach (schräges Dach). An der dreieckigen Seite soll ein Fenster mit größtem Flächeninhalt eingebaut werden, das vom Boden bis zur Dachschräge reicht.

Der Giebel ist in der Mitte 5 m hoch und der Boden ist 8 m breit.

Da der Dachstuhl symmetrisch ist, reicht es (anders ist es auch schwerer) nur den **rechten** Teil der Figur zu betrachten und später die Fläche zu verdoppeln.

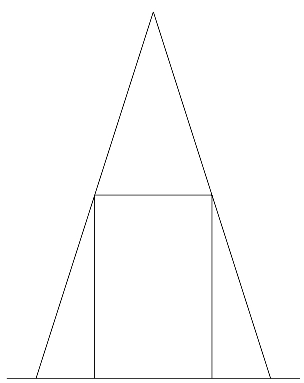


Abbildung 9.1: Der Dachstuhl.

1. Bestimmen Sie, welche Werte x annehmen darf (Definitionsbereich).
2. Bestimmen Sie eine Funktion für den rechten Dachstuhl.
3. Bestimmen Sie folgende Werte für die rechte Seite:

x:	0 m	1 m	2 m	3 m	x
Breite:					
Höhe:					
Fläche:					

4. Bestimmen Sie von der Funktion das Maximum.
5. Geben Sie die größte Fensterfläche an und die Abmessungen des Fensters an.

9.2 Der Dachstuhl – Lösung

Gegeben ist ein Giebeldach (schräges Dach). An der dreieckigen Seite soll ein Fenster mit größtem Flächeninhalt eingebaut werden, das vom Boden bis zur Dachschräge reicht.

Der Giebel ist in der Mitte 5 m hoch und der Boden ist 8 m breit.

Da der Dachstuhl symmetrisch ist, reicht es (anders ist es auch schwerer) nur den **rechten** Teil der Figur zu betrachten und später die Fläche zu verdoppeln.

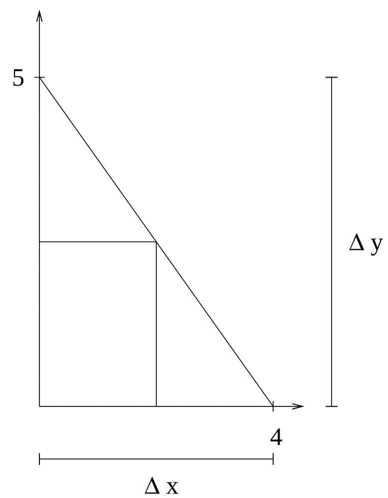


Abbildung 9.2: Der Dachstuhl.

1. Bestimmen Sie, welche Werte x annehmen darf (Definitionsbereich).

   Da nur der rechte Teil betrachtet wird, darf x die Werte zwischen 0 und 4 annehmen:
   $$\mathbb{D}_x = \{x \in \mathbb{R} \,|\, 0 \leq x \leq 4\}$$

2. Bestimmen Sie eine Funktion für den rechten Dachstuhl.

   Da der Dachstuhl eine Gerade ist, reicht es m und b zu bestimmen.

   Der y-Achsenabschnitt beträgt 5 m. Also ist $b = 5$.

   Die Steigung: Auf 4 m fällt die Gerade um 5 m. Die Steigung ist negativ! $m = -\frac{5}{4}$
   $$g(x) = -\frac{5}{4}x + 5$$

3. Bestimmen Sie folgende Werte für die rechte Seite:

Da die rechte Kante $g(x)$ wandert, sind die y-Werte des Dachstuhls und die Höhe des Fensters gleich groß.

x:	0 m	1 m	2 m	3 m	x
Breite:	0	1	2	3	x
Höhe:	5	3,75	2,5	1,25	$-\frac{5}{4}x+5$
Fläche:	0	3,75	5	3,75	$(-\frac{5}{4}x+5)x$

4. Bestimmen Sie von der Funktion das Maximum.

$$\begin{aligned} A(x) &= (-\frac{5}{4}x+5)x \\ A(x) &= -\frac{5}{4}x^2+5x \\ A'(x) &= -\frac{5}{2}x+5 \\ A''(x) &= -\frac{5}{2} \end{aligned}$$

   (a) notwendiges Kriterium: $A'(x)=0$

$$\begin{aligned} A'(x) &= 0 \\ -2,5x+5 &= 0 \\ 5 &= 2{,}5x \\ 2 &= x \end{aligned}$$

   Bei $x=2$ ist eine mögliche Extremstelle.

   (b) hinreichendes Kriterium: $A'(x_0)=0$ und $A''(x_0)\neq 0$

$$A'(2)=0 \text{ und } A''(2)=-2{,}5<0$$

$$A(2)=5$$

   $A(x)$ hat sein relatives Maximum bei $(2|5)$.

5. Geben Sie die größte Fensterfläche an und die Abmessungen des Fensters an.

   Bei den Fensterangaben muss die Breite wieder verdoppelt werden. Die größte Fensterfläche mit $5\,\text{m}^2$ ist erreicht, wenn die Breite 4 m und die Höhe 2,5 m beträgt.

9.3 Dreieck unter Kurve

Gegeben ist eine Parabel f. Ein Dreieck befindet sich unter der Parabel. Die Grundseite des Dreiecks liegt auf der x-Achse. Der rechte Punkt des Dreiecks liegt auf (9|0). Der linke Punkt (p) ist variabel. Am linken Punkt befindet sich ein 90° Winkel. Der dritte Punkt des Dreiecks befindet sich auf der Parabel.

Gesucht sind die Abmessungen des Dreiecks mit der größten Fläche.

$$f(x) = -x^2 + 9$$

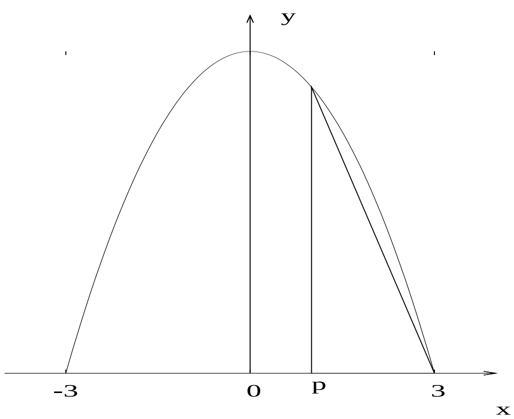


Abbildung 9.3: Ein Dreieck unter einer Kurve.

1. Bestimmen Sie, welche Werte p annehmen darf (Definitionsbereich).
2. Bestimmen Sie die fehlenden Werte:

x = p:	0	1	2	3	x
Grundseite:					
Höhe:					
Fläche:					

3. Stellen Sie eine Funktion für die Fläche auf .
4. Bestimmen Sie von der Flächenfunktion das Maximum.
5. Geben Sie die größte Dreiecksfläche an und die Abmessungen des Dreiecks an.

9.4 Dreieck unter Kurve – Lösung

Gegeben ist eine Parabel f. Ein Dreieck befindet sich unter der Parabel. Die Grundseite des Dreiecks liegt auf der x-Achse. Der rechte Punkt des Dreiecks liegt auf (9|0). Der linke Punkt (p) ist variabel. Am linken Punkt befindet sich ein 90° Winkel. Der dritte Punkt des Dreiecks befindet sich auf der Parabel.

Gesucht sind die Abmessungen des Dreiecks mit der größten Fläche.

$$f(x) = -x^2 + 9$$

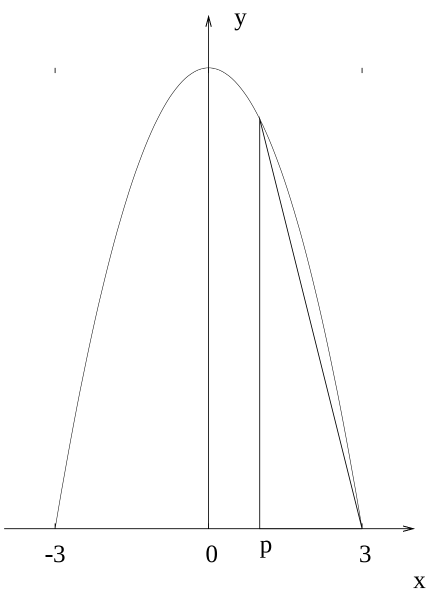


Abbildung 9.4: Ein Dreieck unter einer Kurve.

1. Bestimmen Sie, welche Werte x annehmen darf (Definitionsbereich).

   x kann alle Werte zwischen den Nullstellen von $f(x)$ annehmen.

$$\begin{aligned} -x^2 + 9 &= 0 \\ x^2 - 9 &= 0 \\ x^2 &= 9 \\ x = -3 \quad &od. \quad x = 3 \end{aligned}$$

$$\mathbb{D}_x = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 \leq x \leq 3\}$$

2. Bestimmen Sie die fehlenden Werte für die rechte Seite:
   Die Höhe des Dreiecks bestimmt sich durch $f(x)$, da die Spitze des Dreiecks auf dem Graphen von f liegt.

x:	0	1	2	3	x
Grundseite:	3	2	1	0	$3 - x$
Höhe:	9	8	5	0	$-x^2 + 9$
Fläche:	13,5	8	0	2,5	$0{,}5(3 - x) \cdot$ $\cdot\,(-x^2 + 9)$

3. Stellen Sie eine Funktion für die Fläche auf .

$$A(x) = \frac{x^3 - 3x^2 - 9x + 27}{2}$$
$$A(x) = 0{,}5x^3 - 1{,}5x^2 - 4{,}5x + 13{,}5$$

4. Bestimmen Sie von der Flächenfunktion das Maximum.

$$\begin{aligned} A(x) &= 0{,}5x^3 - 1{,}5x^2 - 4{,}5x + 13{,}5 \\ A'(x) &= 1{,}5x^2 - 3x - 4{,}5 \\ A''(x) &= 3x - 3 \end{aligned}$$

   (a) **notwendiges Kriterium:** $A'(x) = 0$

$$\begin{aligned} A'(x) &= 0 \\ 1{,}5x^2 - 3x - 4{,}5 &= 0 \\ x = -1 \quad &od \quad x = 3 \end{aligned}$$

   Bei $x_1 = -1$ und bei $x_2 = 3$ sind mögliche Extremstellen.

   (b) **hinreichendes Kriterium:** $A'(x_0) = 0$ **und** $A''(x_0) \neq 0$

$$\begin{gathered} A'(-1) = 0 \text{ und} \\ A''(-1) = -6 < 0 \\ A'(3) = 0 \text{ und} \\ A''(3) = 6 > 0 \end{gathered}$$

$$\begin{gathered} A(-1) = 16 \\ A(3) = 0 \end{gathered}$$

Bei $x = -1$ liegt ein Maximum vor. Bei $x = 3$ ist die Dreiecksfläche null, da die Grundseite des Dreiecks ebenfalls null ist.

5. Geben Sie die größte Dreiecksfläche an und die Abmessungen des Dreiecks an.

   Die größte Dreiecksfläche ist bei 16 FE (Flächeneinheiten) erreicht. Die Grundseite beträgt 4 LE (Längeneinheiten), die Höhe 8 LE und das Dreieck beginnt bei $x = -1$.

9.5 Rechteck unter Parabel

Gegeben ist eine Parabel f. Ein Rechteck befindet sich unter der Parabel. Die Grundseite des Rechtecks liegt auf der x-Achse.

Gesucht sind die Abmessungen des Rechtecks mit der größten Fläche.

$$f(x) = -x^2 + 16$$

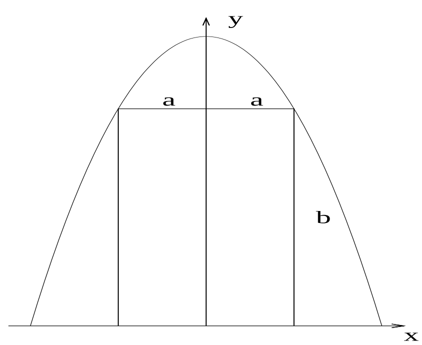


Abbildung 9.5: Ein Rechteck unter einer Parabel.

1. Wählen Sie für die Seitenlänge a (Hälfte des Rechtecks) x. Bestimmen Sie, welche Werte x annehmen darf (Definitionsbereich).

2. Bestimmen Sie die fehlenden Werte:

x:	0	1	2	3	x
a:					
Höhe:					
Fläche:					

3. Stellen Sie eine Funktion für die Fläche auf .

4. Bestimmen Sie von der Flächenfunktion das Maximum.

5. Geben Sie die größte Rechtecksfläche an und die Abmessungen des Rechtecks an.

   Bedenken Sie, dass die Grundseite des Rechtecks $2a$ beträgt.

9.6 Rechteck unter Parabel – Lösung

Gegeben ist eine Parabel f. Ein Rechteck befindet sich unter der Parabel. Die Grundseite des Rechtecks liegt auf der x-Achse.

Gesucht sind die Abmessungen des Rechtecks mit der größten Fläche.

$$f(x) = -x^2 + 16$$

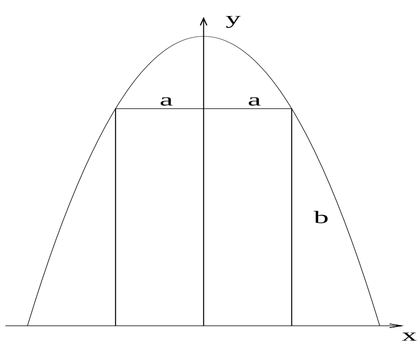


Abbildung 9.6: Ein Rechteck unter einer Parabel.

1. Wählen Sie für die Seitenlänge a (Hälfte des Rechtecks) x. Bestimmen Sie, welche Werte x annehmen darf (Definitionsbereich).

$$\begin{aligned} -x^2 + 16 &= 0 \\ -x^2 &= -16 \\ x^2 &= 16 \\ x = -4 \quad &\text{od.} \quad x = 4 \end{aligned}$$

$$\mathbb{D}_x = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 4\}$$

2. Bestimmen Sie die fehlenden Werte:

x:	0	1	2	3	x
a:	0	1	2	3	x
Höhe:	16	15	12	7	$-x^2 + 16$
Fläche:	0	15	24	21	$x(-x^2 + 16)$

3. Stellen Sie eine Funktion für die Fläche auf .

$$A(x) = x(-x^2 + 16) = -x^3 + 16x$$

4. Bestimmen Sie von der Flächenfunktion das Maximum.

   (a) Ableitungen:

$$\begin{aligned} A(x) &= -x^3 + 16x \\ A'(x) &= -3x^2 + 16 \\ A''(x) &= -6x \end{aligned}$$

   (b) notwendige Bedingung: : $A'(x) = 0$

$$\begin{aligned} A'(x) &= 0 \\ -3x^2 + 16 &= 0 \\ -3x^2 &= -16 \\ x^2 &= \frac{16}{3} \\ x = -\frac{4}{\sqrt{3}} &\quad \text{od.} \quad x = \frac{4}{\sqrt{3}} \\ x = -\frac{4\sqrt{3}}{3} &\quad \text{od.} \quad x = \frac{4\sqrt{3}}{3} \end{aligned}$$

   Bei $x_1 = -\frac{4\sqrt{3}}{3}$ und bei $x_2 = \frac{4\sqrt{3}}{3}$ sind mögliche Extremstellen.

   (c) hinreichende Bedingung: $A'(x_0) = 0$ und $A''(x_0) \neq 0$

$$\begin{aligned} A'\left(-\frac{4\sqrt{3}}{3}\right) &= 0 \text{ und} \\ A''\left(-\frac{4\sqrt{3}}{3}\right) &= -6 \cdot \left(-\frac{4\sqrt{3}}{3}\right) = 6\,\frac{4\sqrt{3}}{3} > 0 \\ A'\left(\frac{4\sqrt{3}}{3}\right) &= 0 \text{ und} \\ A''\left(\frac{4\sqrt{3}}{3}\right) &= -6 \cdot \left(\frac{4\sqrt{3}}{3}\right) = -6\,\frac{4\sqrt{3}}{3} < 0 \end{aligned}$$

   Bei $\frac{4\sqrt{3}}{3}$ ist ein Maximum und bei $-\frac{4\sqrt{3}}{3}$ ist ein Minimum der Fläche.

5. Geben Sie die größte Rechtecksfläche an und die Abmessungen des Rechtecks an. Bedenken Sie, dass die Grundseite des Rechtecks $2a$ beträgt.

$$2 \cdot A\left(\frac{4\sqrt{3}}{3}\right) \approx 49{,}3$$

$$\text{Grundseite}: \frac{8\sqrt{3}}{3}\,\text{E}$$
$$\text{Höhe}: \frac{32}{3}\,\text{E}$$
$$\text{Fläche}: 49{,}3\,\text{FE}$$

(Da die Einheiten nicht genannt sind steht das E für Einheit und FE für Flächeneinheit.)

9.7 Abstand vom Ursprung zu 1/x

Gegeben ist die Funktion

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

Gesucht ist der minimale Abstand des Graphen zum Ursprung.

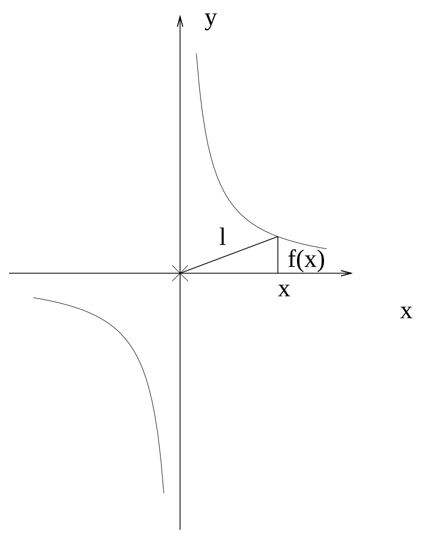


Abbildung 9.7: Der Abstand zwischen dem Graphen der Funktion $f(x) = 1/x$ und dem Ursprung.

Hinweis: Den Abstand erhalten Sie, indem Sie den Pythagoras anwenden (siehe Abb.: 9.7).

Zur Vereinfachung der Rechnung können Sie davon ausgehen, dass wenn l^2 an einer Stelle ein Minimum hat, dass dann ebenfalls auch l an der Stelle ein Minimum hat. Denn es gilt: $l(x) \geq 0$, weil dies ein geometrischer Abstand ist.

Es gibt darüber hinaus noch eine einache elementargeometrische Lösung.

9.8 Abstand vom Ursprung zu 1/x – Lösung

Gegeben ist die Funktion

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

Gesucht ist der minimale Abstand des Graphen zum Ursprung.

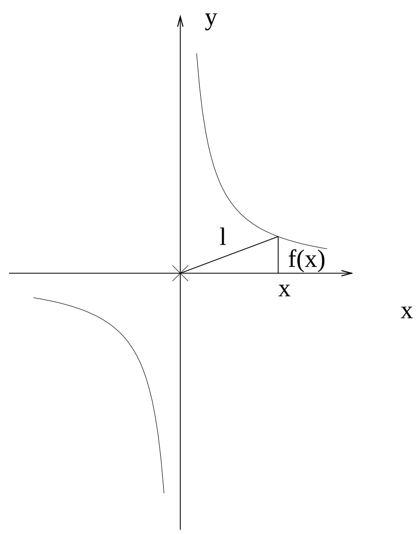


Abbildung 9.8: Der Abstand zwischen dem Graphen der Funktion $f(x) = 1/x$ und dem Ursprung.

Hinweis: Den Abstand erhalten Sie, indem Sie den Pythagoras anwenden (siehe Abb.: 9.8).

Zur Vereinfachung der Rechnung können Sie davon ausgehen, dass wenn l^2 an einer Stelle ein Minimum hat, dass dann ebenfalls auch l an der Stelle ein Minimum hat. Denn es gilt: $l(x) \geq 0$, weil dies ein geometrischer Abstand ist.

$$l(x) = \sqrt{x^2 + (f((x))^2}$$

$$l(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{x^2}}$$

$$h(x) = l^2(x) = x^2 + \frac{1}{x^2}$$

Bestimmen des Minimums:

1. Ableitungen:

$$\begin{aligned} h(x) &= x^2 + \frac{1}{x^2} \\ h'(x) &= 2x - \frac{2}{x^3} \\ h''(x) &= 2 + \frac{6}{x^4} \end{aligned}$$

2. notwendige Bedingung: $h'(x) = 0$

$$\begin{array}{rcll} h'(x) & = & 0 & \\ 2x - \frac{2}{x^3} & = & 0 & \mid \ \cdot x^3 \\ 2x^4 - 2 & = & 0 & \mid \ +2 \\ 2x^4 & = & 2 & \mid \ :2 \\ x^4 & = & 1 & \\ x = -1 & \text{od.} & x = 1 & \end{array}$$

   Bei $x_1 = -1$ und bei $x_2 = 1$ handelt es sich um mögliche Extremstellen.

3. hinreichende Bedingung: $h'(x_0) = 0$ und $h''(x_0) \neq 0$

$$\begin{aligned} h'(-1) &= 0 \text{ und} \\ h''(-1) &= 2 + 6 > 0 \\ h'(1) &= 0 \text{ und} \\ h''(1) &= 2 + 6 > 0 \end{aligned}$$

   Es liegt sowohl bei $x = -1$ als auch bei $x = 1$ ein Minimum vor.

4. Punkte:

$$\begin{aligned} l(1) &= \sqrt{2} \\ l(-1) &= \sqrt{2} \end{aligned}$$

   Die Abstände sind am geringsten bei $x_1 = -1$ und $x_2 = 1$ und betragen jeweils $\sqrt{2}\,E$.

Dieses Ergebnis kann man sich auch elementargeometrisch herleiten. Der Graph der Funktion f ist punktsymmetrisch. Darum wird es zwei Lösungen geben. Andererseits ist der Graph auch symmetrisch zur Winkelhalbierenden $g(x) = x$.

Die Winkelhalbierende und $f(x)$ schneiden sich gerade im Punkt $(1|1)$ und $(-1|-1)$. Also haben diese Punkte den kleinsten Abstand zum Ursprung.

9.9 Weg zur Futterstelle

Eine Kuh steht auf einer Weide und will von ihrer Position einmal zum Fluss gehen und von dort dann zu ihrem Futtertrog. Sie ist 4 m vom Fluss entfernt und der Futtertrog ist 16 m vom Fluss entfernt. Die Entfernung der Kuh zum Futtertrog ist parallel zum Fluss gemessen 10 m.

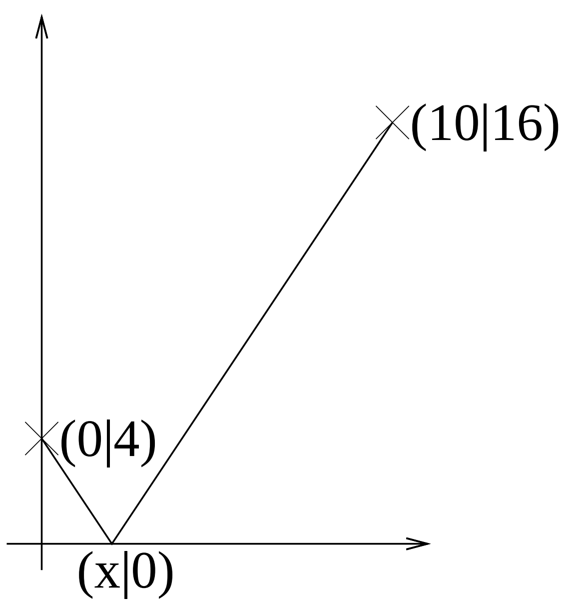


Abbildung 9.9: Eine Kuh steht bei (0|4) und ihr Futtertrog ist bei (10|16). Vor dem Essen will sie etwas trinken. Der Ort, am Fluss bei dem sie trinkt sei $(x|0)$.

1. Bestimmen Sie die Länge des Weges, den die Kuh zurücklegen muss, wenn Sie direkt zum Fluss geht und von dort dann zum Futtertrog.
2. Bestimmen Sie eine Funktion, die je nach Auftreffpunkt am Fluss $(x|0)$ die Länge des Weges angibt. Siehe Abbildung 9.9.
3. Bestimmen Sie den kürzesten Weg.

Darüber hinaus gibt es natürlich eine sehr einfache geometrische Lösung, wenn Sie einfach den Futtertrog am Fluss spiegeln und dann den kürzesten Weg (eine Gerade) bestimmen.

9.10 Weg zur Futterstelle – Lösung

Eine Kuh steht auf einer Weide und will von ihrer Position einmal zum Fluss gehen und von dort dann zu ihrem Futtertrog. Sie ist 4 m vom Fluss entfernt und der Futtertrog ist 16 m vom Fluss entfernt. Die Entfernung der Kuh zum Futtertrog ist parallel zum Fluss gemessen 10 m.

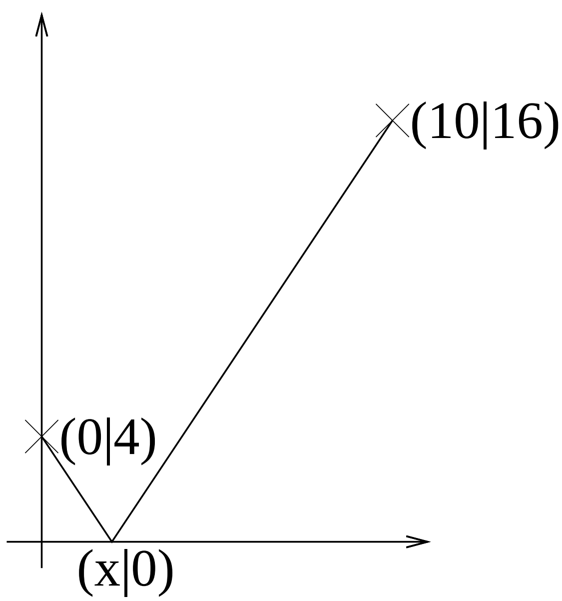


Abbildung 9.10: Eine Kuh steht bei (0|4) und ihr Futtertrog ist bei (10|16). Vor dem Essen will sie etwas trinken. Der Ort, am Fluss bei dem sie trinkt sei $(x|0)$.

1. Bestimmen Sie die Länge des Weges, den die Kuh zurücklegen muss, wenn Sie direkt zum Fluss geht und von dort dann zum Futtertrog.

   Lösung
   Der Weg teilt sich auf in zwei Teilstrecken:

   (a) Der Weg zum Fluss: 4 m

   (b) Der Weg vom Fluss zum Futtertrog:
   Der Weg beschreibt ist die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks,

bei dem der Fluss eine der Katheten ist:

$$l_2 = \sqrt{10^2\,\mathrm{m}^2 + 16^2\,\mathrm{m}^2} = 18{,}9\,\mathrm{m}$$
$$l = l_1 + l_2 = 4\,\mathrm{m} + 18{,}9\,\mathrm{m} = 22{,}9\,\mathrm{m}$$

2. Bestimmen Sie eine Funktion, die je nach Auftreffpunkt am Fluss $(x|0)$ die Länge des Weges angibt. Siehe Abbildung 9.10.

   Lösung

$$\begin{aligned} l &= l_1 + l_2 \\ l_1 &= \sqrt{4^2\,\mathrm{m}^2 + x^2} \\ l_1 &= \sqrt{x^2 + 16^2\,\mathrm{m}^2} \\ l &= \sqrt{4^2\,\mathrm{m}^2 + x^2} + \sqrt{(10-x)^2 + 16^2\,\mathrm{m}^2} \end{aligned}$$

3. Bestimmen Sie den kürzesten Weg.

   Lösung
   Dazu muss man das relative Minimum von $l(x)$ bestimmen. Die Rechnung ist ein klein wenig wuselig. Aber, wenn man sie selbst macht und die Lösung nur zur Kontrolle dazu nimmt, dann hält es sich in Grenzen.

$$\begin{aligned} l(x) &= \sqrt{4^2 + x^2} + \sqrt{(10-x)^2 + 16^2} \\ l(x) &= \sqrt{16 + x^2} + \sqrt{100 - 20x + x^2 + 256} \\ l(x) &= \sqrt{16 + x^2} + \sqrt{x^2 - 20x + 356} \\ l'(x) &= \frac{2x}{2\sqrt{16+x^2}} + \frac{2x - 20}{2\sqrt{x^2 - 20x + 356}} \\ l'(x) &= \frac{x}{\sqrt{16+x^2}} + \frac{x-10}{\sqrt{x^2 - 20x + 356}} \end{aligned}$$

   (a) **notwendige Bedingung:** $l'(x) = 0$

$$l'(x) = 0$$

$$\frac{x}{\sqrt{16+x^2}} + \frac{x-10}{\sqrt{x^2-20x+356}} = 0 \qquad |\text{ gleiche Nenner}$$

$$\frac{x\sqrt{x^2-20x+356}}{\sqrt{16+x^2}\sqrt{x^2-20x+356}} + \frac{(x-10)\sqrt{4^2+x}}{\sqrt{x^2-20x+356}\sqrt{16+x^2}} = 0 \qquad |\text{ multiplizieren mit Nenner}$$

$$x\sqrt{x^2-20x+356} = -(x-10)\sqrt{16+x^2} \qquad |\text{ quadrieren beider Seiten}$$

$$x^2(x^2-20x+356) = (x-10)^2(16+x^2) \qquad |\text{ binomische Formel}$$

$$x^2(x^2-20x+356) = (x^2-20x+100)(16+x^2) \qquad |\text{ ausmultiplizieren}$$

$$x^4 - 20x^3 + 356x^2 = 16x^2 - 320x + 1600 + x^4 - 20x^3 + 100x^2 \quad | \text{ sortieren}$$
$$x^4 - 20x^3 + 356x^2 = x^4 - 20x^3 + 116x^2 - 320x + 1600 \quad | - x^4 + 20x^3$$
$$356x^2 = +116x^2 - 320x + 1600$$

Dies ist jetzt einfach nur noch eine quadratische Gleichung!

$$240x^2 + 320x - 1600 = 0$$

die Lösungen sind: $x = 2$, $x = -10/3$.
Die Extremstellen können bei $x_1 = 2$ oder $x_2 = -10/3$ sein.
Aus dem Sachkontext heraus ist eigentlich klar, dass $x = -10/3$ nicht zum minimalem Weg gehören kann. Ein Maximum kann es auch nicht sein, weil der Weg immer länger wird, je weiter man den Flüsspunkt ins negative verlegt.
Nun, wir haben zwischendurch quadriert. Nicht alle Lösungen der quadratischen Gleichung sind auch Lösungen unserer Ursprungsgleichung: $l'(x) = 0$. (Wenn Sie die Gleichung $x = 1$ quadrieren, erhalten Sie $x^2 = 1$, die Lösungen dieser Gleichung ($x = 1$ und $x = -1$) sind aber nicht mehr alle auch Lösungen von $x = 1$.)
Tatsächlich liefert:

$$l'\left(-\frac{10}{3}\right) = -1{,}2$$

$x = -10/3$ ist keine Lösung!
$x = 2$ ist also eine mögliche Extremstelle.

(b) **hinreichende Bedingung:** $f'(x_0) = 0$ **und** $f''(x_0) \neq 0$
Hier bietet es sich nicht an die 2. Ableitung zu bilden. Sondern hier ist das Vorzeichenkriterium das Mittel der Wahl.

$$f'(2) = 0 \text{ und } f'(0) = -\frac{5\sqrt{356}}{178} < 0$$
$$f'(3) = \frac{\sqrt{305}\,\left(3\sqrt{305} - 35\right)}{1525} > 0$$

An der Stelle $x = 2$ ist ein Übergang von $-$ nach $+$. Also handelt es sich um ein Minimum an der Stelle.

(c) **Bestimmen der kürzesten Länge**

$$l(2) = 10\sqrt{5}$$

Diese Aufgabe hat einen recht ernsten Hintergrund. In der Physik ist der Weg, den das Licht dann tatsächlich nimmt, immer ein extremaler. Also der kürzeste /schnellste Weg oder der längste Weg.

Darüber hinaus gibt es natürlich eine sehr einfache geometrische Lösung, wenn Sie einfach den Futtertrog am Fluss spiegeln und dann den kürzesten Weg (eine Gerade) bestimmen.

Kapitel 10

Extremwertaufgaben

Bei Extremwertaufgaben ist eine typische Aufgabe, die größte (rechteckige) Fläche zwischen einer Kurve und der x-Achse zu finden. Dazu muss in der Regel zuerst eine Funktion gefunden werden, die diese Fläche in Abhängigkeit von einem Parameter beschreibt.

10.1 Arbeitsblätter

10.2 Maximales Rechteck bei gegebenem Umfang

Der Umfang eines Rechtecks soll 25 cm betragen. Welche Abmessungen hat das Rechteck, wenn die Fläche maximal sein soll?

1. Bestimmen Sie, welche Werte die Breite und die Höhe jeweils annehmen können.

2. Bestimmen Sie die fehlenden Werte für das Rechteck:

Breite:	1 m	2 m	3 m	4 m	x
Höhe:					
Fläche:					

3. Bestimmen Sie eine Funktionsgleichung für die Fläche in Abhängigkeit von der Breite (x).

4. Bestimmen Sie die maximale Fläche und die dazugehörigen Maße für Breite und Höhe.

10.3 Maximales Rechteck bei gegebenem Umfang – Lösung

Der Umfang eines Rechtecks soll 25 cm betragen. Welche Abmessungen hat das Rechteck, wenn die Fläche maximal sein soll?

1. Bestimmen Sie, welche Werte die Breite und die Höhe jeweils annehmen können.

   Die Breite (x) und die Höhe (h) können jeweils nicht negativ werden. Das ist deren einzige Einschränkung.

   $$\mathbb{D}_{\text{Breite}} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$$

   $$\mathbb{D}_{\text{Höhe}} = \{h \in \mathbb{R} \mid h \geq 0\}$$

2. Bestimmen Sie die fehlenden Werte für das Rechteck:

   Der Umfang eines Rechtecks bestimmt sich durch:

   $$U = 2a + 2b$$

   Die Fläche dagegen durch:

   $$A = ab$$

Breite:	1 m	2 m	3 m	4 m	x
Höhe:	11,5 m	10,5 m	9,5 m	8,5 m	$(25-2x)/2$
Fläche:	11,5 m^2	21 m^2	19 m^2	17 m^2	$x(25-2x)$

3. Bestimmen Sie eine Funktionsgleichung für die Fläche in Abhängigkeit von der Breite (x).

   $$\begin{array}{lrcl} \text{Zielfunktion:} & A(x) & = & xh \\ \text{Nebenbedingung:} & 25 & = & 2x+2h \\ \text{aufgelöst nach h:} & h & = & (25-2x)/2 \\ & A(x) & = & x(25-2x)/2 \\ & A(x) & = & -x^2+12{,}5x \end{array}$$

4. Bestimmen Sie die maximale Fläche und die dazugehörigen Maße für Breite und Höhe.

   (a) **Ableitungen:**

   $$A(x) = -x^2 + 12{,}5x$$
   $$A'(x) = -2x + 12{,}5$$
   $$A''(x) = -2$$

(b) **notwendige Bedingung:** $A'(x) = 0$

$$\begin{aligned} A'(x) &= 0 \\ -2x + 12{,}5 &= 0 \\ 12{,}5 &= 2x \\ 6{,}25 &= x \end{aligned}$$

An der Stelle $x = 6{,}25$ befindet sich eine mögliche Extremstelle.

(c) **hinreichende Bedingung:** $A'(x_0) = 0$ **und** $A''(x_0) \neq 0$

$$A'(6{,}25) = 0 \text{ und } A''(6{,}25) = -2 < 0$$

Es handelt sich also um eine maximale Fläche bei der Breite von 6,25 m.

(d) **gesuchte Werte:**

$$\begin{aligned} \text{Breite} &= 6{,}25 \\ \text{Höhe} &= 6{,}25 \\ A &= 39{,}0625 \end{aligned}$$

Es handelt sich also um ein Quadrat. Generell kann man also sagen, dass ein Quadrat bei gegebenem Umfang das Rechteck mit der größten Fläche ist.

10.4 Maximale Figuren unter Kurven

Oftmals werden Rechtecke, Dreiecke etc. untersucht, deren eine Ecke sich auf einer gegebenen Kurve befindet. Die Figur wird in der Regel durch die x-Achse und der Kurve begrenzt.

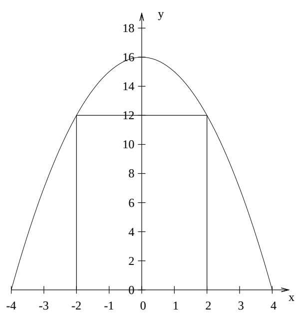
Die Höhe der Figur ist dann durch den y-Wert der Funktion also $f(x)$ gegeben. Bei einem Rechteck (Beginn im Ursprung) ist dann die Fläche:

$$A = x \cdot f(x)$$

Zum Aufstellen der Flächenfunktion ist es oftmals hilfreich, sich die Rechnung an einzelnen Werten klar zu machen.

Aufgabe:
Gesucht ist das größte Rechteck, zwischen der Kurve $f(x)$ und der x-Achse:

$$f(x) = -x^2 + 16$$



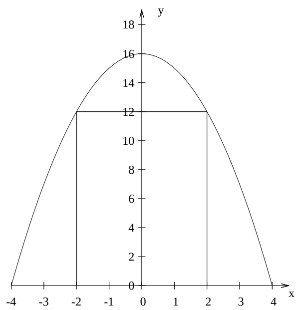
Berücksichtigen Sie dabei Folgendes:

1. Stellen Sie eine Funktion für die Fläche auf.
2. Ermitteln Sie den Definitionsbereich für die Länge und die Breite des Rechtecks.
3. Bestimmen Sie die Abmessungen, die einen maximalen Flächeninhalt ergeben. (Ermitteln Sie das absolute Maximum im Definitionsbereich.)

Lösung siehe Seite 119

Zur Aufgabe: Seite: 118

$$f(x) = -x^2 + 16$$



1. **Aufstellen einer Funktion**
   Die Fläche eines Rechtecks ist gegeben durch:

   $$A = a \cdot b$$

   Dies ist aber eine Funktion von zwei Variablen: a und b.

   Da das Problem symmetrisch ist, betrachten wir nur die rechte Hälfte des Rechtecks und müssen dann später die Fläche verdoppeln.

   Die Höhe des Rechtecks ist jeweils durch die y-Werte der Funktion gegeben. Wenn also die Länge des Rechtecks x ist, dann ist die Höhe der dazugehörige y-Wert: $f(x)$.

   $$A(x) = x \cdot f(x)$$

   Nun ist die Fläche eine Funktion einer Variablen und dann können wir das Maximum berechnen.

2. **Definitionsbereich:**
   Da die Länge und auch die Breite nur positive Werte annehmen können, untersuchen wir zuerst die Nullstellen der Funktion:

   $$\begin{aligned} f(x) &= 0 \\ -x^2 + 16 &= 0 \\ 16 &= x^2 \\ x^2 &= 16 \\ x &= \pm 4 \end{aligned}$$

Die Höhe des Rechtecks wird maximal, wo der y-Wert maximal ist. Da der Scheitelpunkt der Funktion bei 0 liegt:

$$\mathbb{D}_x = \{x \in \mathbb{R} \,|\, 0 \leq x \leq 4\}$$

$$\mathbb{D}_y = \{y \in \mathbb{R} \,|\, 0 \leq y \leq 16\}$$

3. **Bestimmen des maximalen Flächeninhaltes:**

$$\begin{aligned} A(x) &= x(-x^2 + 16) \\ &= -x^3 + 16x \\ A'(x) &= -3x^2 + 16 \\ A''(x) &= -6x \end{aligned}$$

   (a) **notwendige Bedingung:** $A'(x) = 0$

$$\begin{aligned} A'(x) &= 0 \\ -3x^2 + 16 &= 0 \\ 3x^2 &= 16 \\ x^2 &= 16/3 \\ x &= \pm\frac{4}{\sqrt{3}} \end{aligned}$$

   $x = -\frac{4}{\sqrt{3}}$ liegt außerhalb des Definitionsbereiches.
   Bei $x = \frac{4}{\sqrt{3}}$ ist eine mögliche Extremstelle.

   (b) **hinreichende Bedingung:**

$$A'(\frac{4}{\sqrt{3}}) = 0 \text{ und } A''\left(\frac{4}{\sqrt{3}}\right) = -6 \cdot \frac{4}{\sqrt{3}} = -\frac{24}{\sqrt{3}} < 0$$

   Es handelt sich also um ein relatives (lokales) Maximum bei $x = 4$.

   (c) **Abmessungen:**

$$A\left(\frac{4}{\sqrt{3}}\right) = -\left(\frac{4}{\sqrt{3}}\right)^3 + 16\left(\frac{4}{\sqrt{3}}\right) \approx 24{,}6$$

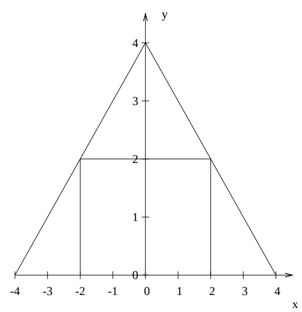
4. **Antwort:**
   Um ganz sicher zu gehen, dass das relative Maximum auch ein absolutes Maximum ist, muss man die Funktion auf Randextrema überprüfen:

$$\begin{aligned} A(0) &= 0 \\ A(4) &= 0 \end{aligned}$$

$$f\left(\frac{4}{\sqrt{3}}\right) = -\left(\frac{4}{\sqrt{3}}\right)^2 + 16 = -\frac{16}{3} + \frac{48}{3} = \frac{32}{3}$$

Wir haben ja nur eine Hälfte des Rechtecks betrachtet: Die Breite des maximalen Rechtecks beträgt: $8/\sqrt{3}$ LE, die Höhe: $32/3$ LE und die Fläche: 24,6 FE.

Aufgabe:
In einem dreieckigen Dachstuhl soll ein rechteckiges Fenster mit maximaler Fläche eingebaut werden. In der Mitte ist der Dachstuhl 4 m hoch. Insgesamt ist das Dach 8 m breit.

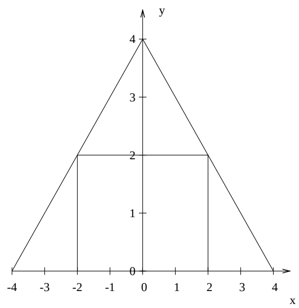


Berücksichtigen Sie dabei Folgendes:

1. Stellen Sie eine Funktion für den Dachstuhl auf.
2. Stellen Sie eine Funktion für die Fläche auf.
3. Ermitteln Sie den Definitionsbereich für die Länge und die Breite des Rechtecks.
4. Bestimmen Sie die Abmessungen, die einen maximalen Flächeninhalt ergeben. (Ermitteln Sie das absolute Maximum im Definitionsbereich.)

Lösung siehe Seite: 123

Zur Aufgabe: Seite 122



1. **Aufstellen einer Funktion für den Dachstuhl**
   Da das Problem symmetrisch ist, betrachten wir nur die rechte Hälfte des Rechtecks und müssen dann später die Fläche verdoppeln.

   Das rechte Dach wird durch eine Gerade beschrieben, die durch die beiden Punkte (0|4) und (4|0) geht, da der Dachstuhl insgesamt 8 m breit ist und somit eine Seite 4 m breit ist.

   $$f(x) = -x + 4$$

2. **Aufstellen einer Funktion**
   Die Fläche eines Rechtecks ist gegeben durch:

   $$A = a \cdot b$$

   Dies ist aber eine Funktion von zwei Variablen: a und b.

   Die Höhe des Rechtecks ist jeweils durch die y-Werte der Funktion gegeben. Wenn also die Länge des Rechtecks x ist, dann ist die Höhe der dazugehörige y-Wert: $f(x)$.

   $$A(x) = x \cdot f(x)$$

   Nun ist die Fläche eine Funktion einer Variablen und dann können wir das Maximum berechnen.

3. **Definitionsbereich:**
   Da die Länge und auch die Breite nur positive Werte annehmen können, untersuchen wir zuerst die Nullstellen der Funktion:

   $$\begin{aligned} f(x) &= 0 \\ -x + 4 &= 0 \\ x &= 4 \end{aligned}$$

Die Höhe des Rechtecks wird maximal, wo der y-Wert maximal ist. Da der Scheitelpunkt der Funktion bei 0 liegt:

$$\mathbb{D}_x = \{x \in \mathbb{R} \,|\, 0 \leq x \leq 4\}$$

$$\mathbb{D}_y = \{y \in \mathbb{R} \,|\, 0 \leq y \leq 4\}$$

4. **Bestimmen des maximalen Flächeninhaltes:**

$$\begin{aligned} A(x) &= x(-x+4) \\ &= -x^2 + 4x \\ A'(x) &= -2x + 4 \\ A''(x) &= -2x \end{aligned}$$

   (a) **notwendige Bedingung:** $A'(x) = 0$

$$\begin{aligned} A'(x) &= 0 \\ -2x + 4 &= 0 \\ 4 &= 2x \\ 2 &= x \end{aligned}$$

   Bei $x = 2$ ist eine mögliche Extremstelle.

   (b) **hinreichende Bedingung:** $A'(x) = 0$ **und** $A''(x) \neq 0$

$$A'(2) = 0 \text{ und } A''(2) = -2 \cdot 2 = -4 < 0$$

   Es handelt sich also um ein relatives (lokales) Maximum bei $x = 2$.

   (c) **Abmessungen:**

$$A(2) = 4$$

5. **Antwort:**
   Um ganz sicher zu gehen, dass das relative Maximum auch ein absolutes Maximum ist, muss man die auf Randextrema überprüfen:

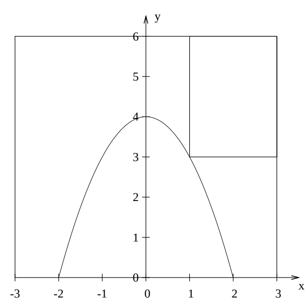
$$\begin{aligned} A(0) &= 0 \\ A(4) &= 0 \\ f(2) &= 2 \end{aligned}$$

   Wir haben ja nur eine Hälfte des Rechtecks betrachtet: Die Breite $(2x)$ des maximalen Rechtecks beträgt: 4 LE, die Höhe $(f(2))$: 2 LE und die Fläche $A(2)$: 4 FE.

Aufgabe:
Aus einem würfelförmigen Klotz mit den Seitenlängen von 6 cm wird von einer Würfelseite ein parabelförmiger Hohlraum geschaffen, der durch die Funktionsgleichung f beschrieben werden kann:

$$f(x) = -x^2 + 4$$

Nun soll aus der Ecke oberhalb des Hohlraumes ein Quader mit dem größten Flächeninhalt ausgespart werden. Bestimmen Sie die Abmessungen.
Betrachten Sie das Problem zweidimensional.

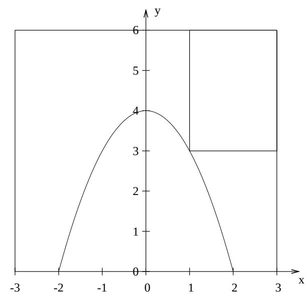


Berücksichtigen Sie dabei Folgendes:

1. Bestimmen Sie die maximale Tiefe der Bohrung.
2. Stellen Sie eine Funktion für die Fläche auf.
3. Ermitteln Sie den Definitionsbereich für die Länge und die Breite des Rechtecks.
4. Bestimmen Sie die Abmessungen, die einen maximalen Flächeninhalt ergeben. (Ermitteln Sie das absolute Maximum im Definitionsbereich.)

Lösung siehe Seite 126

Zur Aufgabe: Seite 125



1. **Maximale Tiefe der Bohrung**

$$f(x) = -x^2 + 4$$

Es handelt sich um eine quadratische Funktion, deren Scheitelpunkt bei $(0|4)$ ist. Die maximale Tiefe der Bohrung beträgt somit 4 E.

2. **Aufstellen einer Funktion**
Die Höhe des Rechtecks ist gegeben durch der Höhe des Würfels minus dem y-Wert der Funktion:

$$\text{Höhe} = 6 - f(x)$$

Die Breite des Rechtecks ist gegeben durch: $3 - x$.

Die Fläche eines Rechtecks ist gegeben durch:

$$A = a \cdot b$$

Dies ist aber eine Funktion von zwei Variablen: a und b.

$$\begin{aligned} A(x) &= (3 - x) \cdot (6 - f(x)) \\ &= (3 - x) \cdot (6 - (-x^2 + 4)) \\ &= (3 - x) \cdot (6 + x^2 - 4) \\ &= (3 - x) \cdot (2 + x^2) \\ &= -x^3 + 3x^2 - 2x + 6 \end{aligned}$$

Nun ist die Fläche eine Funktion einer Variablen und dann können wir das Maximum berechnen.

3. **Definitionsbereich:** Aufgrund der geometrischen Gegebenheit ergibt sich:

$$\mathbb{D}_x = \{x \in \mathbb{R} \,|\, 0 \leq x \leq 3\}$$
$$\mathbb{D}_y = \{y \in \mathbb{R} \,|\, 2 \leq y \leq 6\}$$

   Die Höhe ist mindestens 2 E, da die Bohrung ja nur 4 E tief ist. Maximal ist die Höhe 6 E. Dann ist das Rechteck ganz am Rand.

4. **Bestimmen des maximalen Flächeninhaltes:**

$$\begin{aligned} A(x) &= -x^3 + 3x^2 - 2x + 6 \\ A'(x) &= -3x^2 + 6x - 2 \\ A''(x) &= -6x + 6 \end{aligned}$$

   (a) **notwendige Bedingung:** $A'(x) = 0$

$$\begin{aligned} A'(x) &= 0 \\ -3x^2 + 6x - 2 &= 0 \\ x \approx -1{,}57 \quad \text{oder} \quad x &\approx 0{,}42 \end{aligned}$$

   $x = -1{,}57$ ist nicht im Definitionsbereich enthalten.
   Bei $x \approx 0{,}42$ ist eine mögliche Extremstelle.

   (b) **hinreichende Bedingung:** $A'(x_0) = 0$ **und** $A''(x_0) \neq 0$

$$A'(0{,}42) = 0 \text{ und } A''(0{,}42) = -6 \cdot 0{,}42 + 6 > 0$$

   Es handelt sich also um ein relatives (lokales) Maximum bei $x \approx 0{,}42$.

   (c) **Abmessungen:**

$$A(0{,}42) \approx 5{,}6$$

5. **Antwort:**
   Um ganz sicher zu gehen, dass das relative Maximum auch ein absolutes Maximum ist, muss man die auf Randextrema überprüfen:

$$\begin{aligned} A(0) &= 0 \\ A(6) &= 0 \\ 6 - f(0{,}42) &\approx 1{,}8 \end{aligned}$$

   Die Breite des maximalen Rechtecks beträgt: 5,58 LE, die Höhe: 1,8 LE und die Fläche: 5,6 FE.

10.5 Aufgaben

Aufgabe 10.1
Die Summe zweier Zahlen soll 10 betragen. Wie müssen die Zahlen lauten, damit deren Produkt möglichst groß ist?
(Lösung siehe Seite 129).

Aufgabe 10.2
Die Summe zweier natürlicher Zahlen soll 11 betragen. Wie müssen die Zahlen lauten, damit deren Produkt möglichst groß ist?
(Lösung siehe Seite 130).

10.6 Lösungen

Zu Aufgabe: 10.1
Die Summe zweier Zahlen soll 10 betragen. Wie müssen die Zahlen lauten, damit deren Produkt möglichst groß ist?

Die beiden Zahlen seien a und b.

$$f(a, b) = a \cdot b$$

Die Nebenbedingung ist, dass die Summe der beiden Zahlen 10 betragen soll:

$$\begin{aligned} a + b &= 10 \\ b &= 10 - a \end{aligned}$$

Einsetzen in f ergibt eine Funktion mit nur einer Variablen. f ist dann nur noch von a abhängig:

$$\begin{aligned} f(a) &= a \cdot (10 - a) \\ f(a) &= 10a - a^2 \end{aligned}$$

Von dieser Funktion bestimmen wir nun das Maximum. Dazu haben Sie zwei Möglichkeiten:

1. Sie erkennen, dass es sich um eine Parabel handelt und bestimmen den Scheitelpunkt.
2. Sie benutzen die Differenzialrechnung.

1. Weg: Benutzen der Parabeleigenschaften
Als erstes bestimmen Sie die Nullstellen. Der Scheitelpunkt liegt dann in der Mitte zwischen den beiden Nullstellen:

$$\begin{aligned} 10a - a^2 &= 0 \\ a(10 - a) &= 0 \end{aligned}$$

Ein Produkt ist dann null, wenn einer der beiden Faktoren null ist:

$$\begin{aligned} n_1 &= 0 \\ n_2 &= 10 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_x &= \frac{0 + 10}{2} \\ &= 5 \\ S_y &= f(5) \\ &= 10 \cdot 5 - 5^2 \\ &= 50 - 25 \\ &= 25 \end{aligned}$$

Die beiden Zahlen lauten dann: $a = 5$ und $b = 5$. Deren Produkt ist dann 25.

2. Weg: Benutzen der Differenzialrechnung

$$\begin{aligned} f(a) &= -a^2 + 10a \\ f'(a) &= -2a + 10 \\ f''(a) &= -2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f'(a) &= 0 \\ -2a + 10 &= 0 \\ 10 &= 2a \\ 5 &= a \end{aligned}$$

$$f''(5) = -2 < 0$$

Es handelt sich also um ein Maximum.

Die beiden Zahlen lauten dann: $a = 5$ und $b = 5$.

Zu Aufgabe: 10.2

Die Summe zweier Zahlen soll 11 betragen. Wie müssen die Zahlen lauten, damit deren Produkt möglichst groß ist?

Die beiden Zahlen seien a und b.

$$f(a, b) = a \cdot b$$

Die Nebenbedingung ist, dass die Summe der beiden Zahlen 10 betragen soll:

$$\begin{aligned} a + b &= 11 \\ b &= 11 - a \end{aligned}$$

Einsetzen in f ergibt eine Funktion mit nur einer Variablen. f ist dann nur noch von a abhängig:

$$\begin{aligned} f(a) &= a \cdot (11 - a) \\ f(a) &= 11a - a^2 \end{aligned}$$

Von dieser Funktion bestimmen wir nun das Maximum. Dazu haben Sie zwei Möglichkeiten:

1. Sie erkennen, dass es sich um eine Parabel handelt und bestimmen den Scheitelpunkt.

2. Sie benutzen die Differenzialrechnung.

1. Weg: Benutzen der Parabeleigenschaften
Als erstes bestimmen Sie die Nullstellen. Der Scheitelpunkt liegt dann in der Mitte zwischen den beiden Nullstellen:

$$\begin{aligned} 11a - a^2 &= 0 \\ a(11 - a) &= 0 \end{aligned}$$

Ein Produkt ist dann null, wenn einer der beiden Faktoren null ist:

$$\begin{aligned} n_1 &= 0 \\ n_2 &= 11 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_x &= \frac{0 + 11}{2} \\ &= 5{,}5 \end{aligned}$$

Dies ist aber keine natürliche Zahl. Jetzt müssen wir ausprobieren. Die nächstgelegene Zahlen sind 5 und 6.

2. Weg: Benutzen der Differenzialrechnung

$$\begin{aligned} f(a) &= -a^2 + 11a \\ f'(a) &= -2a + 11 \\ f''(a) &= -2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f'(a) &= 0 \\ -2a + 11 &= 0 \\ 11 &= 2a \\ 5{,}5 &= a \end{aligned}$$

$$f''(5{,}5) = -2 < 0$$

Es handelt sich also um ein Maximum.

Dies ist aber keine natürliche Zahl. Jetzt müssen wir ausprobieren. Die nächstgelegene Zahlen sind 5 und 6.

Kapitel 11

Ableitungsregeln

In diesem Kapitel sollen die Ableitungsregeln für zusammengesetzte Funktionen untersucht werden.

Die Idee ist, dass man mit einigen wenigen Funktionen alle beliebig komplexe Funktionen zusammensetzen kann.

Z.B.: besteht $f(x) = (x+3)^2$ aus zwei Anweisungen:

1. Addiere zur einer Zahl 3 dazu: $z = x + 3$
2. Quadriere die obige Zahl: z^2

Damit setzt sich die Funktion aus zwei Funktionen zusammen.

Das Ziel besteht darin, von einigen wenigen Funktionen die Ableitung zu bestimmen, um dann von allen Funktionen die Ableitung bestimmen zu können.

Angefangen sind wir schon, als wir die Regel aufgestellt haben, dass die Ableitung von einer Summe aus zwei Funktionen einzeln abgeleitet werden darf (siehe Kap.: 2.6):

Es lässt sich zeigen, dass man mit der Summenregel, der Produktregel und der Kettenregel alle Funktionen ableiten kann.

An einzelnen Funktionen werden in der Schule nur noch betrachtet:

- $f(x) = x^n$
- $f(x) = e^x$
- $f(x) = \ln(x)$

Diese Funktionen können miteinander multipliziert werden (Produktregel) oder verkettet, der Wert einer Funktion dient der nächsten Funktion als Argument.

11.1 Kettenregel

Die Kettenregel beschreibt wie verkettete Funktionen abgeleitet werden.

Verkettete Funktionen sind z. B.: $\ln(x^2)$, $\sin(2x+3)$ oder $(3x+5)^{10}$. Man kann zwischen einer äußeren Funktion und einer inneren Funktion unterscheiden:

$$y = f(g(x)) = (3x+5)^{10}$$

äußere Funktion $f(z)$: z^{10} innere Funktion $g(x)$: $3x+5$

Als allgemeine Regel ergibt sich:

$$f(g(x))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

In unserem Beispiel:

äußere Funktion	$f(z)$:	z^{10}	$f'(z) = 10z^9$
innere Funktion	$z = g(x)$:	$3x+5$	$g'(x) = 3$

$$\begin{aligned} y &= (3x+5)^{10} \\ y' &= 10\,(3x+5)^9 \cdot 3 \end{aligned}$$

Merkregel: innere mal äußere

Wobei es in der Praxis günstiger ist mit der äußeren Funktion anzufangen.

11.2 Beweis der Kettenregel

Der Beweis erfolgt mit Hilfe des Differenzialquotienten:

$$f(g(x_0))' = \lim_{h\to 0} \frac{f(g(x_0+h)) - f(g(x_0))}{x_0+h-x_0}$$

Der Bruch wird erweitert mit: $g(x_0+h) - g(x_0)$:

$$f(g(x_0))' = \lim_{h\to 0} \frac{f(g(x_0+h)) - f(g(x_0))}{x_0+h-x_0} \cdot \frac{g(x_0+h)-g(x_0)}{g(x_0+h)-g(x_0)}$$

Vertauschen der Nenner ergibt:

$$f(g(x_0))' = \lim_{h\to 0} = \frac{f(g(x_0+h)) - f(g(x_0))}{g(x_0+h)-g(x_0)} \cdot \frac{g(x_0+h)-g(x_0)}{x_0+h-x_0}$$

Um die Struktur deutlicher zu machen, wird im ersten Bruch $g(x)$ durch z ersetzt und dann ist $g(x_0+h)$ etwas mehr als z, also $z+l$ (l statt h)

$$f(g(x_0))' = \lim_{l\to 0} \frac{f(z_0+l) - f(z_0)}{z_0+l-z_0} \cdot \frac{g(x_0+h)-g(x_0)}{x_0+h-x_0}$$

Nun ist der erste Bruch gerade die Ableitung von f, der äußeren Funktion und der zweite Bruch ist die Ableitung der inneren Funktion g.

$$f(g(x_0))' = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0)$$

11.3 Aufgaben zur Kettenregel

Aufgabe 11.1 (Grundlage)

$f(g(x))$	äußere Funktion	innere Funktion
$(3x+5)^{10}$		
$\sin(x^2)$		
$\ln(x^2+5)$		
2^{3x+4}		
$(\ln(x))^2$		
$(5x^2+3x)^5$		
$\ln(\sin(x))$		
$\frac{1}{x^2+1}$		

(Lösung siehe Seite 137).

Aufgabe 11.2 Leiten Sie ab mit Hilfe der Kettenregel ohne zusammenzufassen (Grundlage).

$f(x) = (3x+1)^2$	
$f(x) = (x+3)^2$	
$f(x) = (4x+5)^3$	
$f(x) = \left(x^2-4x+7\right)^5$	

(Lösung siehe Seite 137).

Aufgabe 11.3 Leiten Sie ab mit Hilfe der Kettenregel ohne zusammenzufassen (Erweiterung).

$(3x+5)^{10}$	
$\left(5x^2+3x\right)^5$	
$\left(4x^2+5x\right)^3$	
$\left(5x^3-4x+7\right)^4$	
$\left(\left(x^2+3x\right)^4+4x\right)^5$	
$\frac{1}{x^2+1}$	
$\frac{1}{\left(x^2+1\right)^2}$	
$\frac{1}{x^3-2x}$	

(Lösung siehe Seite 138).

Aufgabe 11.4 Leiten Sie ab mit Hilfe der Kettenregel ohne zusammenzufassen (Erweiterung).

$(3x+5)^5$	
$\left(2x^2+6x+2\right)^4$	
$\left(8x^3+2x\right)^3$	
$\left(5x^3-4x+7\right)^4$	
$\left(\left(2x^2+3\right)^4+3(x-2)^2\right)^5$	

(Lösung siehe Seite 139).

Aufgabe 11.5 Bestimmen Sie die Extrempunkte von $f(x)$ (Grundlage):

$$f(x) = (3x - 6)^2$$

(Lösung siehe Seite 139).

Aufgabe 11.6 Bestimmen Sie die Extrempunkte von $f(x)$:

$$f(x) = \left(3x^2 - 12\right)^4$$

(Lösung siehe Seite 141).

11.4 Lösungen zu den Aufgaben

Zu Aufgabe: 11.1

$f(g(x))$	äußere Funktion	innere Funktion
$(3x+5)^{10}$	z^{10}	$3x+5$
$\sin(x^2)$	$\sin(z)$	x^2
$\ln(x^2+5)$	$\ln(z)$	x^2+5
2^{3x+4}	2^z	$3x+4$
$(\ln(x))^2$	z^2	$\ln(x)$
$(5x^2+3x)^5$	z^5	$5x^2+3x$
$\ln(\sin(x))$	$\ln(z)$	$\sin(x)$
$\frac{1}{x^2+1}$	$\frac{1}{z}$	x^2+1

Zu Aufgabe: 11.2

$$\begin{aligned} f(x) &= (3x+1)^2 \\ \text{äußere Funktion: } f(z) &= z^2 \\ \text{innere Funktion: } g(x) &= 3x+1 \\ g'(x) &= 3 \\ f'(z) &= 2z \\ f'(x) &= 2(3x+1)\cdot 3 \end{aligned}$$

—

$$\begin{aligned} f(x) &= (x+3)^2 \\ f(z) &= z^2 \\ g(x) &= x+3 \\ f'(z) &= 2z \\ g'(x) &= 1 \\ f'(x) &= 2(x+3)\cdot 1 \end{aligned}$$

—

$$\begin{aligned} f(x) &= (4x+5)^3 \\ f(z) &= z^3 \\ g(x) &= 4x+5 \\ f'(z) &= 3z^2 \\ g'(x) &= 4 \\ f'(x) &= 3(4x+5)^2 \cdot 4 \end{aligned}$$

—

$$\begin{aligned} f(x) &= \left(x^2-4x+7\right)^5 \\ f(z) &= z^5 \\ g(x) &= x^2-4x+7 \\ f'(z) &= 5z^4 \\ g'(x) &= 2x-4 \\ f'(x) &= 5 \cdot \left(x^2-4x+7\right)^4 \cdot (2x-4) \\ & \text{vergessen Sie bitte nicht} \\ & \text{die Klammer beim zweiten Faktor} \end{aligned}$$

Zu Aufgabe: 11.3

$(3x+5)^{10}$	$10 \cdot (3x+5)^9 \cdot 3$
$\left(5x^2+3x\right)^5$	$5 \cdot \left(5x^2+3x\right)^4 \cdot (10x+3)$
$\left(4x^2+5x\right)^3$	$3 \cdot \left(4x^2+5x\right)^2 \cdot (8x+5)$
$\left(5x^3-4x+7\right)^4$	$4 \cdot \left(5x^3-4x+7\right)^3 \cdot (15x^2-4)$
$\left[\left(x^2+3x\right)^4+4x\right]^5$	$5\left[\left(x^2+3x\right)^4+4x\right]^4 \cdot \left[4\left(x^2+3x\right)^3 \cdot (2x+3)+4\right]$
$\frac{1}{x^2+1}$	$-\left(x^2+1\right)^{-2} \cdot 2x = \frac{-2x}{\left(x^2+1\right)^2}$
$\frac{1}{\left(x^2+1\right)^2}$	$(-2)\left(x^2+1\right)^{-3} \cdot 2x = \frac{-4x}{\left(x^2+1\right)^3}$
$\frac{1}{x^3-2x}$	$-\left(x^3-2x\right)^{-2} \cdot (3x-2) = \frac{-(3x-2)}{\left(x^3-2x\right)^2}$

Zu Aufgabe: 11.4

Leiten Sie ab mit Hilfe der Kettenregel ohne zusammenzufassen.

$(3x+5)^5$	$5(3x+5)^4 \cdot 3$
$\left(2x^2+6x+2\right)^4$	$4\left(2x^2+6x+2\right)^3 \cdot (4x+6)$
$\left(8x^3+2x\right)^3$	$3\left(8x^3+2x\right)^2 \cdot (24x^2+2)$
$\left(5x^3-4x+7\right)^4$	$4\left(5x^3-4x+7\right)^3 \cdot (15x^2-4)$
$\left(\left(2x^2+3\right)^4+3(x-2)^2\right)^5$	$5\left(\left(2x^2+3\right)^4+3(x-2)^2\right)^4 \cdot \left[4\left(2x^2+3\right)^3 \cdot 4x+6(x-2)\right]$

Zu Aufgabe: 11.5

Bestimmen Sie die Extremstellen von $f(x)$:

$$f(x) = (3x-6)^2$$

Das Bild des Graphen: Abb. 11.1.

1. Ableitungen:

$$\begin{aligned} f(x) &= (3x-6)^2 \\ f'(x) &= 2(3x-6)\cdot 3 \\ &= 6(3x-6) \\ &= 18x-36 \\ f''(x) &= 18 \end{aligned}$$

2. notwendige Bedingung: $f'(x) = 0$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 0 \\ 18x-36 &= 0 \\ 18x &= 36 \\ x &= 2 \end{aligned}$$

3. hinreichende Bedingung: $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) \neq 0$

$$f''(2) = 18 \neq 0$$

   Da $f''(2) = 18 > 0$ ist, handelt es sich um ein Minumum.

4. Extrempunkt:

$$\begin{aligned} f(x) &= (3x-6)^2 \\ f(2) &= (3 \cdot 2 - 6)^2 \\ &= 0 \end{aligned}$$

   Das Miniumum ist bei $(2|0)$.

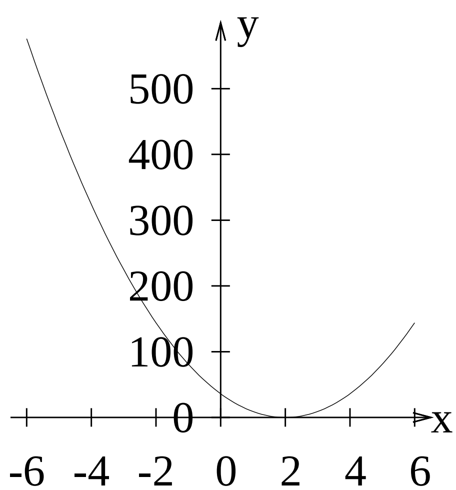


Abbildung 11.1: $f(x) = (3x-6)^2$

Zu Aufgabe: 11.6
Bestimmen Sie die Extrempunkte von $f(x) = (3x^2 - 12)^4$
Das Bild des Graphen: Abb. 11.2.

1. Ableitungen:

$$\begin{aligned}
f(x) &= \left(3x^2 - 12\right)^4 \\
f'(x) &= 4\left(3x^2 - 12\right)^3 \cdot 6x \\
f''(x) &= 12\left(3x^2 - 12\right)^2 \cdot 6x \cdot 6x + 4\left(3x^2 - 12\right)^3 \cdot 6 \\
f''(x) &= 12\left(3x^2 - 12\right)^2 \cdot 36x^2 + 4\left(3x^2 - 12\right)^3 \cdot 6 \\
f''(x) &= \left(3x^2 - 12\right)^2 (12 \cdot 36x^2 + 4(3x^2 - 12) \cdot 6) \\
f''(x) &= \left(3x^2 - 12\right)^2 (12 \cdot 36x^2 + 4 \cdot 3x^2 - 4 \cdot 12 \cdot 6) \\
f''(x) &= \left(3x^2 - 12\right)^2 (504x^2 - 288)
\end{aligned}$$

2. notwendige Bedingung: $f'(x) = 0$

$$4\left(3x^2 - 12\right)^3 \cdot 6x = 0$$

Ein Produkt ist dann null, wenn einer der Faktoren null ist:
1. Fall: 2. Fall:

$$x = 0$$

$$\begin{aligned}
3x^2 - 12 &= 0 \\
x^2 - 4 &= 0 \\
x^2 &= 4 \\
x &= -2 \text{ od. } x = 2
\end{aligned}$$

Es gibt also drei Nullstellen: $x_1 = -2$, $x_2 = 0$ und $x_3 = 2$.
Es gibt also drei mögliche Extremstellen: $x_1 = -2$, $x_2 = 0$ und $x_3 = 2$.

3. hinreichende Bedingung: $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) \neq 0$

$$\begin{aligned}
f'(-2) &= 0 \text{ und} \\
f''(-2) &= 0 \\
f'(2) &= 0 \text{ und} \\
f''(2) &= 0 \\
f'(0) &= 0 \text{ und} \\
f(0) &= (-12)^2 - 288 = -144 < 0
\end{aligned}$$

Bei $x = 0$ liegt ein Minimum vor. Aber über die Stellen $x = -2$ und $x = 2$ können wir noch nichts sagen.

(a) Entweder ausprobieren, ob diese Stellen Sattelpunkte (Wendestellen) sind. Dazu könnte man prinzipiell sogar in die Ursprungsfunktion f Werte einsetzen.

(b) Oder das Vorzeichenkriterium auf $f'(x)$ anwenden:

$$\begin{aligned} f'(-2) &= 0 \text{ und} \\ f'(-3) &= -243000 < 0 \\ f'(-1) &= 17496 > 0 \\ f'(2) &= 0 \text{ und} \\ f'(1) &= -17496 < 0 \\ f'(3) &= 243000 > 0 \end{aligned}$$

i. Die Stelle $x = -2$.
Es findet ein Vorzeichenwechsel statt von $-$ zu $+$. ($f'(-3) < 0$ und $f'(-1) > 0$).
An der Stelle gibt es ein Minimum.

ii. Die Stelle $x = 0$.
Es findet ein Vorzeichenwechsel statt von $+$ zu $-$. ($f'(-1) > 0$ und $f'(1) < 0$).
An der Stelle gibt es ein Maximum.

iii. Die Stelle $x = 2$.
Es findet ein Vorzeichenwechsel statt von $-$ zu $+$. ($f'(1) < 0$ und $f'(3) > 0$).
An der Stelle gibt es ein Minimum.

4. Punkte

$$f(-2) = 0, \quad f(0) = 20736, \quad f(2) = 0$$

Der Graph der Funktion f hat an den Punkten $(-2|0)$ und $(2|0)$ ein Minimum. Bei $(0|20736)$ hat er ein Maximum.

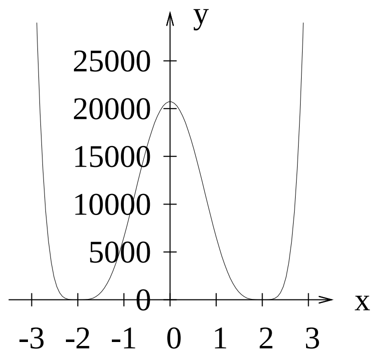


Abbildung 11.2: $f(x) = (3x^2 - 12)^4$

11.5 Produktregel

Die Produktregel beschreibt, wie Funktionen, die miteinander multipliziert werden abgeleitet werden:

$$f(x) = (x+1)^5 \cdot (2x+3)^4$$

Bei Polynomen könnte man alles noch ausrechnen, aber schon schwer wird es bei:

$$f(x) = x \cdot \ln(x)$$

Als allgemeine Regel ergibt sich:

$$(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$$

Beispiel:

$$h(x) = x^5 \cdot (7x^2+3)^4$$

$$\begin{aligned} f(x) &= x^5 \\ f'(x) &= 5x^4 \\ g(x) &= (7x^2+3)^4 \\ g'(x) &= 4(7x^2+3)^3 \cdot 14x \\ h'(x) &= 5x^4 \cdot (7x^2+3)^4 + x^5 \cdot 4(7x^2+3)^3 \cdot 14x \end{aligned}$$

11.6 Beweis der Produktregel

Der Beweis erfolgt mit Hilfe des Differenzialquotienten:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x)}{x_0 + h - x_0}$$

Um die allgemeine Namenskonvention anderer Bücher zu übernehmen, sei die zu untersuchende Funktion:

$$a(x) = f(x) \cdot g(x)$$

Dann lautet der Differenzialquotient:

$$a'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{a(x_0 + h) - a(x)}{x_0 + h - x_0}$$

$$\begin{aligned} a(x_0) &= f(x_0) \cdot g(x_0) \\ a(x_0 + h) &= f(x_0 + h) \cdot g(x_0 + h) \end{aligned}$$

Eingesetzt in den Differenzialquotienten ergibt dies:

$$a'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) \cdot g(x_0 + h) - f(x_0) \cdot g(x_0)}{x_0 + h - x_0}$$

Jetzt wird eine „Null“ ergänzt:

$$0 = -f(x_0) \cdot g(x_0 + h) + f(x_0) \cdot g(x_0 + h)$$

$$a'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) \cdot g(x_0 + h) - f(x_0) \cdot g(x_0 + h) + f(x_0) \cdot g(x_0 + h) - f(x_0) \cdot g(x_0)}{x_0 + h - x_0}$$

Dies kann man auf zwei Brüchen schreiben:

$$a'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) \cdot g(x_0 + h) - f(x_0) \cdot g(x_0 + h)}{x_0 + h - x_0} + \frac{f(x_0) \cdot g(x_0 + h) - f(x_0) \cdot g(x_0)}{x_0 + h - x_0}$$

Beim ersten Bruch wird nun $g(x_0 + h)$ ausgeklammert und beim zweiten Bruch wird $f(x_0)$ ausgeklammert:

$$a'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{(f(x_0 + h) - f(x_0)) \cdot g(x_0 + h)}{x_0 + h - x_0} + \frac{f(x_0)(g(x_0 + h) - g(x_0))}{x_0 + h - x_0}$$

In den Klammern stehen aber nun gerade die Ableitungen der jeweiligen Funktionen:

$$a'(x) = f(x_0)' \cdot g(x_0) + f(x_0)g(x_0)'$$

$g(x_0 + h)$ geht dann auch gegen $g(x_0)$

11.7 Aufgaben zur Produktregel

Aufgabe 11.7
Leiten Sie ab mit Hilfe der Produktregel ohne zusammenzufassen (Grundlage).

$f(x) = (5x+1) \cdot x$	
$f(x) = (4x+6)(3x+2)$	
$f(x) = (2x+1)x^2$	
$f(x) = (\frac{1}{3}x - 2)x$	
$f(x) = x^2 \cdot x^3$	

(Lösung siehe Seite 147).

Aufgabe 11.8
Leiten Sie ab mit Hilfe der Produktregel ohne zusammenzufassen (Grundlage).

$f(x) = (x^2+1)x^3$	
$f(x) = (x^2+x)(3x+2)$	
$f(x) = (3x^2+x)x^2$	
$f(x) = (4x^5+2x)x^3$	
$f(x) = (x^2+3x)(x^2+5x)$	
$f(x) = (5x^2+3x+1)(x^2+5x)$	

(Lösung siehe Seite 147).

Aufgabe 11.9

Leiten Sie ab mit Hilfe der Produktregel ohne zusammenzufassen (Erweiterung).

$f(x) = (4x^2 + x)(5x + 4)$	
$f(x) = (4x^3 + 2x)x^3$	
$f(x) = (4x^2 - 5x)(5x^2 + x)$	
$f(x) = (x^2 + 2) \cdot x^3$	
$f(x) = (x^2 + 3x)(x^2 + 3x)$	
$f(x) = (5x^2 + 2x)(x^2 + 3x)(x^3 + 4x)$	

(Lösung siehe Seite 147).

11.8 Lösungen zu den Aufgaben

Zu Aufgabe: 11.7

$f(x) = (5x+1)\cdot x$ $= 5x^2 + x$	$f'(x) = 5\cdot x + (5x+1)\cdot 1$ $= 10x + 1$
$f(x) = (4x+6)(3x+2)$	$f'(x) = 4\,(3x+2) + (4x+6)\,3$
$f(x) = (2x+1)x^2$	$f'(x) = 2\,x^2 + (2x+1)\,2x$
$f(x) = (\frac{1}{3}x - 2)x$	$f'(x) = \frac{1}{3}\,x + (\frac{1}{3}x - 2)\cdot 1$
$f(x) = x^2\cdot x^3$	$f'(x) = 2x\cdot x^3 + x^2\cdot 3x^2 = 5x^4$

Zu Aufgabe: 11.8

$f(x) = (x^2+1)x^3$	$f'(x) = 2x\cdot x^3 + (x^2+1)\cdot 3x^2$
$f(x) = (x^2+x)(3x+2)$	$f'(x) = (2x+1)(3x+2) + (x^2+x)3$
$f(x) = (3x^2+x)x^2$	$f'(x) = (6x+1)x^2 + (3x^2+x)2x$
$f(x) = (4x^5+2x)x^3$	$f'(x) = (20x^4+2)x^3 + (4x^5+2x)3x^2$
$f(x) = (x^2+3x)(x^2+5x)$	$f'(x) = (2x+3)(x^2+5x)$ $+ (x^2+3x)(2x+5)$
$f(x) = (5x^2+3x+1)(x^2+5x)$	$f'(x) = (10x+3)(x^2+5x)$ $+ (5x^2+3x+1)(2x+5)$

Zu Aufgabe: 11.9

$f(x) = (4x^2 + x)(5x + 4)$	$f'(x) = (8x + 1)\,(5x + 4) + (4x^2 + x)\,5$
$f(x) = (4x^3 + 2x)x^3$	$f'(x) = (12x^2 + 2)\,x^3 + (4x^3 + 2x)\,3x^2$
$f(x) = (4x^2 - 5x)(5x^2 + x)$	$f'(x) = (8x - 5)\,(5x^2 + x)$ $+ (4x^2 - 5x)\,(10x + 1)$
$f(x) = (x^2 + 2) \cdot x^3$	$f'(x) = 2x\,x^3 + (x^2 + 2)\,3x^2$
$f(x) = (x^2 + 3x)(x^2 + 3x)$ $= (x^2 + 3x)^2$	$f'(x) = (2x + 3)\,(x^2 + 3x)$ $+ (x^2 + 3x)\,(2x + 3)$ $= 2(x^2 + 3x)(2x + 3)$
$f(x) = (5x^2 + 2x)(x^2 + 3x)(x^3 + 4x)$	$f'(x) = (10x + 2)\left[(x^2 + 3x)(x^3 + 4x)\right]$ $+ \left[(5x^2 + 2x)\right](2x + 3)\left[(x^3 + 4x)\right]$ $+ \left[(5x^2 + 2x)(x^2 + 3x)\right](3x^2 + 4)$

11.9 Aufgaben zu Produkt und Kettenregel

Aufgabe 11.10

Leiten Sie ab ohne zusammenzufassen (Grundlage).

$f(x) = \left(x^2+1\right)^2 \cdot x^3$	
$f(x) = \left(x^2+3x\right)^2 \cdot x^3$	
$f(x) = \left(4x^5+2x\right)^3 \cdot x^3$	
$f(x) = \left(3x^2+5x\right)^2 \cdot 2x$	

(Lösung siehe Seite 150).

Aufgabe 11.11

Leiten Sie ab ohne zusammenzufassen. (Erweiterung)

$f(x) = \left(x^2+3x\right)^2 \left(x^2+5x\right)^3$	
$f(x) = \left(x^4+x^2\right)^3 \cdot \left(x^4+2x^3\right)^4$	
$f(x) = \left[(7x^2+2)^5 \cdot x^3\right]^6$	
$f(x) = \left[(2x^2+4x) \cdot (5x+1)\right]^2 \cdot x$	
$f(x) = \left[(2x+2)^4 \cdot (3x^2+2)\right]^2$	

(Lösung siehe Seite 150).

11.10 Lösungen zu den Aufgaben

Zu Aufgabe: 11.10

$$f(x) = \left(x^2+1\right)^2 \cdot x^3$$
$$f'(x) = 2(x^2+1)2x \cdot x^3 + \left(x^2+1\right)^2 3x^2$$

—

$$f(x) = \left(x^2+3x\right)^2 \cdot x^3$$
$$f'(x) = 2(x^2+3x)(2x+3)x^3 + \left(x^2+3x\right)^2 3x^2$$

—

$$f(x) = \left(4x^5+2x\right)^3 \cdot x^3$$
$$f'(x) = 3\left(4x^5+2x\right)^2 \left(20x^4+2\right) x^3 + \left(4x^5+2x\right)^3 3x^2$$

—

$$f(x) = \left(3x^2+5x\right)^2 \cdot 2x$$
$$f'(x) = 2(3x^2+5x)(6x+5) \cdot 2x + \left(3x^2+5x\right)^2 2$$

Zu Aufgabe: 11.11

$$f(x) = \left(x^2+3x\right)^2\left(x^2+5x\right)^3$$

Zuerst benötigen Sie die Produktregel

Die Kettenregel wenden Sie an, um die einzelnen Faktoren abzuleiten

$$f'(x) = 2(x^2+3x)(2x+3)\left(x^2+5x\right)^3 + \left(x^2+3x\right)^2 \cdot 3\left(x^2+5x\right)^2(2x+5)$$

—

$$f(x) = \left(x^4+x^2\right)^3 \cdot \left(x^4+2x^3\right)^4$$

$$f'(x) = 3\left(x^4+x^2\right)^2(4x^3+2x)\left(x^4+2x^3\right)^4 + \left(x^4+x^2\right)^3 \cdot 4\left(x^4+2x^3\right)^3(4x^3+6x^2)$$

—

$$f(x) = \left[\left(7x^2+2\right)^5 \cdot x^3\right]^6$$

Sie wenden zuerst die Kettenregel an.

Für die innere Ableitung benötigen Sie die Produktregel.

$$f'(x) = 6\left[\left(7x^2+2\right)^5 \cdot x^3\right]^5 \cdot \left[5(7x^2+2)^4 \cdot (14x) \cdot x^3 + \left(7x^2+2\right)^5 \cdot 3x^2\right]$$

—

$$f(x) = \left[(2x^2+4x)\cdot(5x+1)\right]^2 \cdot x$$

$$f'(x) = 2[(2x^2+4x)\cdot(5x+1)] \cdot \left[(4x+4)(5x+1)+(2x^2+4x)\cdot 5\right] x + \left[(2x^2+4x)\cdot(5x+1)\right]^2$$

—

$$f(x) = \left[(2x+2)^4 \cdot (3x^2+2)\right]^2$$

$$f'(x) = 2\left[(2x+2)^4 \cdot (3x^2+2)\right] \cdot \left[4\,(2x+2)^3 \cdot 2 \cdot (3x^2+2) + (2x+2)^4 \cdot 6x\right]$$

11.11 Quotientenregel

Gesucht ist eine Regel, mit der sich Brüche von Funktionen ableiten lassen. Der Zähler soll die Funktion f sein und der Nenner die Funktion g. Natürlich ist der Bruch und damit die Ableitung nur an den Stellen definiert, wo $g(x) \neq 0$ gilt.

Die Regel ist die Quotientenregel:

$$\left(\frac{f}{g}\right)'$$

Beginnen Sie mit einer Umformung, so dass Sie die Produktregel anwenden können:

$$\frac{f}{g} = f \cdot g^{-1}$$

Die -1 bedeutet hier einen negativen Exponenten.
(Hinweis: Manchmal wird die -1 im Exponenten auch benutzt, um anzuzeigen, dass es sich um die Umkehrfunktion handelt. Dies ist leider mehrdeutig und nur durch den Kontext zu erfassen.)

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \left(f \cdot g^{-1}\right)'$$

Anwenden der Potenzregel:

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = f' \cdot g^{-1} + f \cdot (-1)g^{-2}g'$$

Anwenden der Produktregel:

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'}{g} - \frac{fg'}{g^2}$$

Erweitern des linken Bruchs mit g

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g}{g^2} - \frac{fg'}{g^2}$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

Im Zähler steht fast die Produktregel. Nur ein Minuszeichen statt eines Pluszeichens und im Nenner das Quadrat des ehemaligen Nenners.

Beispiel:

$$\frac{x^3+2x+5}{x^2}$$

$$\begin{aligned} f(x) &= x^3+2x+5 \\ f'(x) &= 3x^2+2 \\ g(x) &= x^2 \\ g'(x) &= 2x \\ g^2(x) &= x^4 \end{aligned}$$

$$\left(\frac{x^3+2x+5}{x^2}\right)' = \frac{(3x^2+2)x^2-(x^3+2x+5)2x}{x^4}$$

Oftmals und auch hier kann man anschließend noch kürzen. Hier wird nun mit x gekürzt:

$$\left(\frac{x^3+2x+5}{x^2}\right)' = \frac{(3x^2+2)x-(x^3+2x+5)2}{x^3}$$

$$\left(\frac{x^3+2x+5}{x^2}\right)' = \frac{3x^3+2x-2x^3-4x-10}{x^3}$$

$$\left(\frac{x^3+2x+5}{x^2}\right)' = \frac{x^3-2x-10}{x^3}$$

11.12 Aufgaben zur Quotientenregel

Aufgabe 11.12
Leiten Sie ab mit Hilfe der Quotientenregel ohne zusammenzufassen.

$f(x) = \frac{x-1}{x+1}$	
$f(x) = \frac{x+1}{x-1}$	
$f(x) = \frac{x}{x^2+1}$	
$f(x) = \frac{x^4+2x+1}{x^3-2x}$	

(Lösung siehe Seite 155).

Aufgabe 11.13
Leiten Sie ab mit Hilfe der Quotientenregel. Fassen Sie auch zusammen.

$f(x) = \frac{x^2}{x+1}$	
$f(x) = \frac{x^2(3x+1)}{4x-1}$	
$f(x) = \frac{x}{x^2+x}$	

(Lösung siehe Seite 156).

11.13 Lösungen zu den Aufgaben

Zu Aufgabe: 11.12

$$f(x) = \frac{g(x)}{h(x)} \quad f'(x) = \frac{g'(x) \cdot h(x) - g(x) \cdot h'(x)}{(h(x))^2}$$

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{x-1}{x+1} \\
g(x) &= x-1 & h(x) &= x+1 \\
g'(x) &= 1 & h'(x) &= 1 \\
f'(x) &= \frac{1 \cdot (x+1) - (x-1) \cdot 1}{(x+1)^2} \\
&= \frac{2}{(x+1)^2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{x+1}{x-1} \\
g(x) &= x+1 & h(x) &= x-1 \\
g'(x) &= 1 & h'(x) &= 1 \\
f'(x) &= \frac{1 \cdot (x-1) - (x+1) \cdot 1}{(x-1)^2} \\
&= \frac{-2}{(x-1)^2}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \frac{x}{x^2+1} \\
g(x) &= x & h(x) &= x^2+1 \\
g'(x) &= 1 & h'(x) &= 2x \\
f'(x) &= \frac{1\cdot(x^2+1) - x\cdot(2x)}{(x^2+1)^2} \\
&= \frac{-x^2+1}{(x^2+1)^2}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \frac{x^4+2x+1}{x^3-2x} \\
g(x) &= x^4+2x+1 & h(x) &= x^3-2x \\
g'(x) &= 4x^3+2 & h'(x) &= 3x^2-2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{(4x^3+2)\cdot(x^3-2x) - (x^4+2x+1)\cdot(3x^2-2)}{(x\cdot(x^2-2))^2} \\
&= \frac{x^6-6x^4-4x^3-3x^2+2}{x^2(x^2-2)^2}
\end{aligned}
$$

Vergessen Sie die Klammern nicht!

Zu Aufgabe: 11.13

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \frac{x^2}{x+1} \\
g(x) &= x^2 & h(x) &= x+1 \\
g'(x) &= 2x & h'(x) &= 1 \\
f'(x) &= \frac{2x\cdot(x+1) - x^2\cdot 1}{(x+1)^2} \\
&= \frac{x^2+2x}{(x+1)^2} \\
&= \frac{x(x+2)}{(x+1)^2}
\end{aligned}
$$

$$f(x) = \frac{x^2(3x+1)}{4x-1}$$

$$g(x) = x^2(3x+1) \qquad h(x) = 4x-1$$

$$g'(x) = 2x(3x+1) + x^2 \cdot 3 \qquad h'(x) = 4$$

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{\big(2x(3x+1) + x^2 \cdot 3\big)(4x-1) - x^2(3x+1) \cdot 4}{(4x-1)^2} \\
&= \frac{\big(6x^2+2x) + 3x^2\big)(4x-1) - 12x^3 - 4x^2}{(4x-1)^2} \\
&= \frac{\big(9x^2+2x\big)(4x-1) - 12x^3 - 4x^2}{(4x-1)^2} \\
&= \frac{36x^3 + 8x^2 - 9x^2 - 2x - 12x^3 - 4x^2}{(4x-1)^2} \\
&= \frac{24x^3 - 5x^2 - 2x}{(4x-1)^2} \\
&= \frac{x(24x^2 - 5x - 2)}{(4x-1)^2}
\end{aligned}$$

$$f(x) = \frac{x}{x^2+x}$$

$$g(x) = x \qquad h(x) = x^2 + x$$

$$g'(x) = 1 \qquad h'(x) = 2x+1$$

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{1 \cdot (x^2+x) - x \cdot (2x+1)}{(x \cdot (x+1))^2} \\
&= \frac{x^2 + x - 2x^2 - x)}{x^2(x+1)^2} \\
&= \frac{-x^2}{x^2(x+1)^2} \\
&= -\frac{1}{(x+1)^2}
\end{aligned}$$

Kapitel 12

Kurvendiskussion

Die Kurvendiskussion dient dazu einen Graphen anhand seiner Funktionsvorschrift zu untersuchen. Dies erfolgt in mehreren Schritten:

12.1 Definitionsbereich

Zuerst wird der Definitionsbereich untersucht. Welche Werte darf man alles für x einsetzen.

Folgende Untersuchungskriterien haben sich bewährt:

1. Man darf nicht durch null teilen. Sobald ein x im Nenner steht müssen Sie die Nullstellen des Nenners suchen.

2. Eingrenzen der Werte auf sinnvolle Werte aus dem Sachzusammenhang. Meistens sind in der Aufgabe Grenzen beschrieben, doch gibt es auch Begrenzungen, die sich aus der Modellierung des Problems ergeben.

   Beispiele:

   - Eine Herzfrequenz kann nicht kleiner als null sein. Aber auch nicht größer als ...
   - Eine geometrische Streckenlänge kann nicht kleiner als null sein.

12.2 Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen

1. Schnittpunkt mit der y-Achse: Wert im Ursprung.

   $$f(0) = y$$

   Bei einem Polynom ist dies genau der Wert ohne x:

   $$f(x) = x^2 + 3x + 5$$

$$f(0) = 5$$

Schnittpunkt ist dann (0|5).

2. Schnittpunkt mit der x-Achse: Nullstellen.

$$f(x) = 0$$

12.3 Symmetrie

Untersucht werden nur die Symmetrie zum Ursprung und die Symmetrie zur y-Achse.

Symmetrien zu einem beliebigen Punkt oder zu x=a, könnte man durch Verschieben erreichen.

12.3.1 Punktsymmetrie

$$f(x) = -f(-x)$$

Geometrisch erfolgt die Punktspiegelung indem man man von einem Punkt eine Linie durch den Ursprung zieht und dann die Linie um dieselbe Länge verlängert.

12.3.2 Achsensymmetrie

$$f(x) = f(-x)$$

Geometrisch gesehen haben zwei gespiegelte Punkte dieselbe Entfernung zur y-Achse.

12.4 Verhalten im Unendlichen

Hilfreich zum eigenen Überprüfen ist es große Werte einzusetzen.

Hilfreich sind folgende Regeln bei Polynomen und gebrochen rationalen Funktionen:

- Bei einem Polynom reicht es den Summand mit dem höchsten Exponent über dem x zu untersuchen:

  Für hohe Zahlen:

  1. Das Vorzeichen ist positiv:

  $$\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$$

  2. Das Vorzeichen ist negativ:

  $$\lim_{x \to \infty} f(x) = -\infty$$

Für kleine Zahlen:

1. Das Vorzeichen ist positiv und der Exponent ist gerade:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \infty$$

2. Das Vorzeichen ist positiv und der Exponent ist ungerade:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$$

- Bei gebrochen rationalen Funktionen untersuchen Sie den Zählergrad und den Nennergrad.

1. Zählergrad = Nennergrad
   Es gibt einen Grenzwert. Der ist so groß wie der Bruch aus den Vorfaktoren der x mit dem größten Exponenten:

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{6x^5 + 4x^2 + 2}{3x^5 - 4x^3} = \frac{6}{3} = 2$$

2. Zählergrad > Nennergrad
   Dies kann man wie bei den Polynomen behandeln mit dem Wert von Zählergrad - Nennergrad.

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{6x^5 + 4x^2 + 2}{3x^4 - 4x^3} = -\infty$$

   Weil Zählergrad - Nennergrad ungerade ist.

3. Zählergrad < Nennergrad

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 0$$

12.5 Extrempunkte

1. notwendige Bedingung:

$$f'(x_0) = 0$$

   Bei $x = x_0$ sind mögliche Extremstellen.

2. hinreichende Bedingung:

   - $$f'(x_0) = 0 \text{ und } f''(x_0) = 0$$

     Dann ist an der Stelle x_0 eine Extremstelle.

  - $f''(x_0) < 0$: An der Stelle gibt es bei $f(x_0)$ ein Maximum.
  - $f''(x_0) > 0$: An der Stelle gibt es bei $f(x_0)$ ein Minimum.
- Vorzeichenkriterium: Nehmen Sie aus der 1. Ableitung (f') zwei Punkte direkt vor und nach der zu untersuchenden Stelle.
  - Die y-Werte haben dasselbe Vorzeichen: Sattelpunkt.
  - Die y-Werte haben unterschiedliche Vorzeichen: Extrempunkt

12.6 Monotonie

Die Monotonie einer Funktion wird immer über einen Bereich betrachtet. Dieser Bereich kann von $x = 0$ bis $x = 1$ sein oder über alle reellen Zahlen.

- Wenn eine Funktion in einem Intervall ständig steigt ist sie in dem Intervall **streng monoton steigend**:

$$f'(x) > 0$$

- Wenn eine Funktion in einem Intervall ständig fällt ist sie in dem Intervall **streng monoton fallend**:

$$f'(x) < 0$$

- Wenn eine Funktion in einem Intervall ständig steigt aber manchmal auch parallel zur x-Achse verläuft ist sie in dem Intervall **monoton steigend**:

$$f'(x) \geq 0$$

- Wenn eine Funktion in einem Intervall ständig fällt aber manchmal auch parallel zur x-Achse verläuft ist sie in dem Intervall **monoton fallend**:

$$f'(x) \leq 0$$

12.7 Wendepunkte

1. notwendige Bedingung:

$$f''(x_0) = 0$$

   Bei $x = x_0$ ist eine mögliche Wendestelle.

2. hinreichende Bedingung:

   - $$f''(x_0) = 0 \text{ und } f'''(x_0) = 0$$

  - $f'''(x_0) < 0$: An der Stelle gibt es bei $f(x_0)$ eine Wendestelle und bei $f'(x_0)$ eine maximale Steigung.
  - $f'''(x_0) > 0$: An der Stelle gibt es bei $f(x_0)$ eine Wendestelle und bei $f'(x_0)$ eine minimale Steigung.
- Vorzeichenkriterium: Nehmen Sie aus der 2. Ableitung (f'') zwei Punkte direkt vor und nach der zu untersuchenden Stelle.

  Die y-Werte haben dasselbe Vorzeichen: Wendestelle.

12.8 Polstellen

Wenn ein x im Nenner vorhanden ist, und der Nenner dann eine Nullstelle hat, liegt dort eine Definitionslücke vor. Dies kann dann entweder eine **Polstelle** sein:
Nullstellengrad (Nenner) > Nullstellengrad (Zähler)
oder eine stetig hebbare Lücke.

Bei einer Polstelle muss man noch den Vorzeichenwechsel untersuchen:

- Einsetzen von Werten direkt vor und hinter der Stelle in $f(x)$.
- Wenn - nach eventuellem Kürzen - der Grad der Nullstelle im Nenner ungerade ist: Polstelle mit Vorzeichenwechsel.
- Wenn - nach eventuellem Kürzen - der Grad der Nullstelle im Nenner gerade ist: Polstelle ohne Vorzeichenwechsel.

12.9 Lücken

Wenn ein x im Nenner vorhanden ist, und der Nenner dann eine Nullstelle hat, liegt dort eine Definitionslücke vor. Dies kann dann entweder eine **stetig hebbare Lücke** sein:
Nullstellengrad (Nenner) = Nullstellengrad (Zähler)
oder eine Polstelle.

12.10 Angabe der Stammfunktion

Dies bedeutet eine Integration und damit kann man dann „beliebte“ Fragen nach der Fläche oder dem Mittelwert beantworten.

12.11 Zeichnen des Graphen

Kapitel 13

Nullstellen bestimmen

Nullstellen zu bestimmen ist eine immer wiederkehrende Aufgabe in der Differenzialrechnung. Dies dient zur Angabe:

- Der Nullstellen von f. Wo schneidet oder berührt $f(x)$ die x-Achse?
- Um die Extremstelle zu finden muss die notwendige Bedingung erfüllt sein: $f'(x) = 0$.
- Um die Wendestelle zu finden muss die notwendige Bedingung erfüllt sein: $f''(x) = 0$.

Im folgenden Kapitel sind alle Verfahren der Oberstufe gesammelt. Sowohl die Verfahren der quadratischen Gleichungen als auch der Exponentialfunktionen.

13.1 Quadratische Gleichungen

Quadratische Gleichungen werden mit der p-q-Formel oder mit der quadratischen Ergänzung gelöst:

$$f(x) = 4x^2 + 8x - 32$$

Beispiel:

$$\begin{array}{rcll}
4x^2 + 8x - 32 & = & 0 & \mid\ :4 \\
x^2 + 2x - 8 & = & 0 & \mid\ +8 \\
x^2 + 2x & = & 8 & \mid\ +8 \\
x^2 + 2x & = & 8 & \mid\ \text{quadratische Ergänzung} \\
(x + \frac{2}{2})^2 & = & 8 + (1)^2 & \\
(x + 1)^2 & = & 8 + 1 & \\
(x + 1)^2 & = & 9 & \mid\ \text{Es gibt zwei Lösungen: } (-3)^2 = 3^2 = 9 \\
x + 1 = -3 & \text{oder} & x + 1 = 3 & \mid\ -1 \\
x = -4 & \text{oder} & x = 2 &
\end{array}$$

Nun kann man die Funktion auch anders schreiben:

- Vorzeichen umkehren
- Die Funktion insgesamt mit dem Vorfaktor von x^2 multiplizieren.

$$f(x) = 4x^2 + 8x - 32 = 4 \cdot (x + 4)(x - 2)$$

13.2 Nullstellen bestimmen durch Ausklammern

Wenn ein Polynom vorliegt, ohne eine einzelne Zahl, z. B.:

$$f(x) = x^2 + 2x$$

dann kann man dies als Produkt schreiben:

$$f(x) = x \cdot (x + 2)$$

Wenn man die Nullstelle bestimmen will:

$$x \cdot (x + 2) = 0$$

Ein Produkt ist dann null, wenn mindestens einer der Faktoren null ist:

$$\begin{array}{rcl} x \cdot (x+2) & = & 0 \\ x = 0 & \text{oder} & x = -2 \end{array}$$

Beispiele:

1. $$f(x) = x^3 - x$$

   $$\begin{aligned} x^3 - x &= 0 \\ x(x^2 - 1) &= 0 \end{aligned}$$

   Durch das Umschreiben entsteht eine quadratische Gleichung in der Klammer, die gelöst werden muss.

   (a) Fall I: $x = 0$

   (b) Fall II: $x^2 - 1 = 0$
   d.h: $x = -1$ oder $x = 1$.

   $$\mathbb{L} = \{-1, 0, 1\}$$

2. $$f(x) = x^4 - 2x^3 + x^2$$

   $$\begin{aligned} x^4 - 2x^3 + x^2 &= 0 \\ x^2(x^2 - 2x + 1) &= 0 \end{aligned}$$

   Die Lösung der quadratischen Gleichung ergibt:

   $$\begin{aligned} x^2 - 2x + 1 &= 0 \\ x &= 1 \end{aligned}$$

   $$\mathbb{L} = \{0, 1\}$$

13.3 Substitution bei Polynomen

$$f(x) = x^4 - 4x^2 + 3$$

Eine solche Gleichung ist nur im Ausnahmefall lösbar.

Um die Struktur der Gleichung sichtbar zu machen, schreiben wir für jedes x^2 ein z:

$$\begin{aligned} z &= x^2 \\ z^2 &= x^4 \end{aligned}$$

Dann kann man die Gleichung umformen und es ergibt sich eine quadratische Gleichung:

$$\begin{array}{rcl} x^4 - 4x^2 + 3 & = & 0 \\ z^2 - 4z + 3 & = & 0 \\ z = -3 & \text{oder} & z = 1 \end{array}$$

Die Rücksubstitution ergibt:

1. Fall: $z = -3$
   keine Lösung, denn x^2 ist immer positiv.

2. Fall: $z = 1$

$$\begin{array}{rcl} z & = & 1 \\ x^2 & = & 1 \\ x = -1 & \text{oder} & x = 1 \end{array}$$

$$x^4 - 4x^2 + 3 = 0$$

hat als Lösung: $x = -1$ oder $x = 1$.

13.4 Nullstellen bei gebrochen rationalen Funktionen

Eine gebrochen rationalen Funktikann nur dann eine Nullstelle haben, wenn der Zähler null ist. Der Nenner kann aber auch an der Stelle eine Nullstelle haben und dann muss man die Funktion genauer untersuchen:

Eine Nullstelle im Zähler und eine Nullstelle im Nenner an derselben Stelle: Zählergrad und Nennergrad beziehen sich auf diese zu untersuchende Stelle: Es gilt drei Fälle zu untersuchen:

1. Nennergrad > 0: Definitionslücke
2. Zählergrad $=$ Nennergrad: stetig hebbare Lücke
3. Zählergrad $>$ Nennergrad: Nullstelle
4. Zählergrad $<$ Nennergrad: Polstelle
   (a) Nennergrad - Zählergrad ist ungerade:
   Polstelle mit Vorzeichenwechsel.
   (b) Nennergrad - Zählergrad ist gerade:
   Polstelle ohne Vorzeichenwechsel.

13.5 Nullstellenbestimmung durch Exponentenvergleich

$$f(x) = 2^{2x} - 2^{x+1}$$

$$2^{2x} - 2^{x+1} = 0$$

Umstellen ergibt:

$$2^{2x} = 2^{x+1}$$

Da 2^x eine stetig steigende Funktion (monoton wachsend) ist, gibt es zu jedem y-Wert nur genau einen x-Wert. Darum müssen die Exponenten gleich sein, wenn die Gleichung erfüllt ist, und dies ist dann auch die einzige Lösung:

$$2x = x + 1$$
$$x = 1$$

13.6 Nullstellenbestimmung durch Substitution bei Exp-Fkt.

Der Exponentenvergleich funktioniert nur, wenn keine Zahlen addiert werden:

$$f(x) = 2^{2x} - 12 \cdot 2^x + 32$$

Dies ist in Wirklichkeit eine quadratische Gleichung. Um die Struktur deutlich zu machen, substituieren wir:

$$\begin{aligned} z &= 2^x \\ z^2 &= 2^{2x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2^{2x} - 12 \cdot 2^x + 32 &= 0 \\ z^2 - 12z + 32 &= 0 \end{aligned}$$

Lösen der quadratischen Gleichung ergibt: $z = 4$ oder $z = 8$.

1. Fall: $z = 4$

$$\begin{aligned} z &= 4 \\ 2^x &= 4 \\ x &= \log_2(4) \\ x &= 2 \end{aligned}$$

2. Fall: $z = 8$

$$\begin{aligned} z &= 8 \\ 2^x &= 8 \\ x &= \log_2(8) \\ x &= 3 \end{aligned}$$

Nicht immer gibt es zwei Lösungen. Es kann auch keine oder eine Lösung geben. Wenn z eine negative Lösung hat, gibt es natürlich kein x, welches z ergeben kann.

13.7 Nullstellenbestimmung durch Ausklammern bei Exp-Funktionen

$$f(x) = 2^{x+3} - 2^x - 224$$

$$\begin{aligned}
2^{x+3} - 2^x - 224 &= 0 && \mid +224 \\
2^{x+3} - 2^x &= 224 && \mid \text{Potenzgesetze} \\
2^3 \cdot 2^x - 2^x &= 224 && \mid \text{ausklammern} \\
2^x \left(2^3 - 1\right) &= 224 && \mid \text{ausrechnen} \\
2^x(7) &= 224 && \mid :7 \\
2^x &= 32 && \mid \\
x &= \log_2 32 \\
x &= 5
\end{aligned}$$

Das Verfahren funktioniert natürlich nur, wenn die Basen gleich sind.

Kapitel 14

Integral 2

In diesem Kapitel werden wir das Integral nochmal aufrollen. Bisher haben wir der Einfachheit halber gesagt, dass das Integral einfach die Umkehrung des Differenzierens sei. Dies ist zwar richtig, aber nicht die Definition des Integrals.

Wir werden zuerst Flächen unter einer Kurve bestimmen. Dabei definieren wird das Integral in einer üblichen Weise. Dann werden wir an die Einsicht gewinnen, dass die Ableitung dieser Flächenfunktion[1] gerade die Originalfunktion ist und dann werden wir noch Formalia klären.

14.0.1 Fläche mit Rechtecken nähern

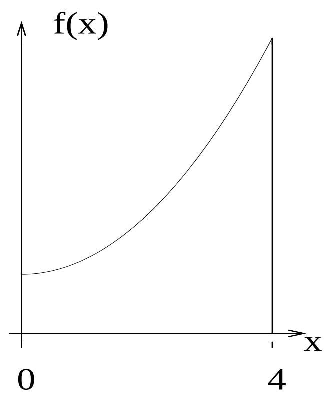


Abbildung 14.1: $f(x) = x^2 + 4$ Die Fläche zwischen der Kurve und der x-Achse soll von $x = 0$ bis $x = 4$ bestimmt werden.

[1]In diesem Kapitel werden wir nur stetig monoton steigende Funktionen untersuchen. Dann ist die Obersumme (die obere Flächenabschätzung) die Summe der Rechtecke, deren rechte Ecke die Funktion berührt. Die Untersumme (die untere Flächenabschätzung) ist die Summe der Rechtecke, deren linke Ecke die Funktion berührt. Bei allgemeinen Funktionen muss man entweder die Funktion in monoton steigende oder fallende Abschnitte einteilen oder die Obersumme muss dann die Summe der Rechtecke sein, die größer als die Funktion sind. Das sind dann Rechtecke deren linke oder rechte Ecke auf der Funktion liegen.

Gegeben ist eine Kurve. Z.B. 14.1. Gesucht ist nun die Fläche zwischen der Kurve und der x-Achse.

In einer ersten (sehr groben) Näherung kann man die Fläche abschätzen durch ein Rechteck, welches unter die Kurve passt, bzw. ein Rechteck, welches die ganze Kurve beinhaltet.

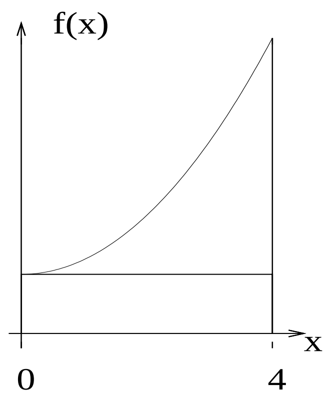


Abbildung 14.2: Die Fläche des linken Rechtecks ist eine untere Abschätzung der gesuchten Fläche.

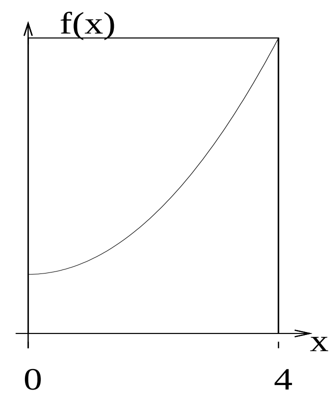


Abbildung 14.3: Die Fläche des rechten Rechtecks ist eine obere Abschätzung der gesuchten Fläche.

Besser wird die Abschätzung, wenn man zwei Rechtecke nimmt:

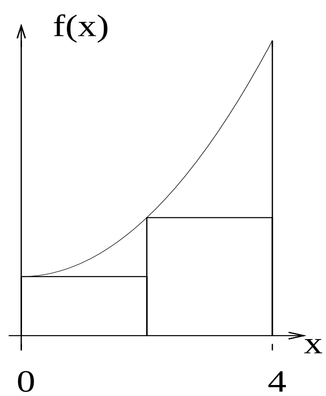


Abbildung 14.4: Die Fläche der linken Rechtecke ist eine untere Abschätzung der gesuchten Fläche.

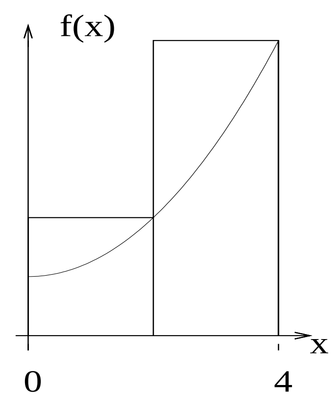


Abbildung 14.5: Die Fläche der rechten Rechtecke ist eine obere Abschätzung der gesuchten Fläche.

Noch besser wird die Abschätzung, wenn man drei Rechtecke nimmt:

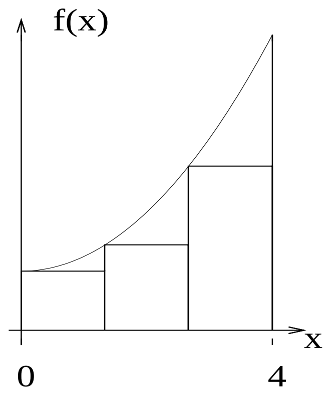


Abbildung 14.6: Die Fläche der linken Rechtecke ist eine untere Abschätzung der gesuchten Fläche.

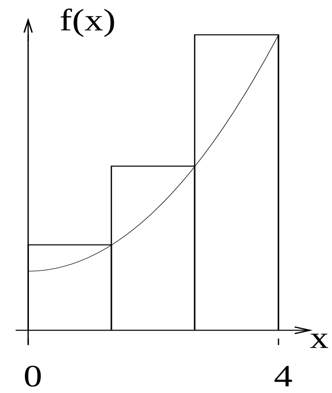


Abbildung 14.7: Die Fläche der rechten Rechtecke ist eine obere Abschätzung der gesuchten Fläche.

Je kleiner die Breite der Rechtecke, desto kleiner ist der Fehler.
Noch besser wird die Abschätzung, wenn man vier Rechtecke nimmt:

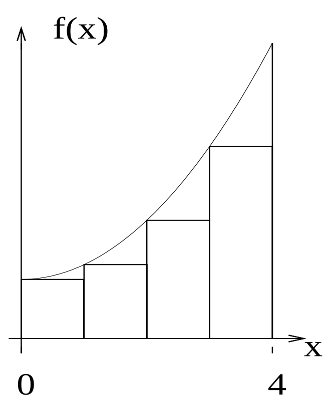


Abbildung 14.8: Die Fläche der linken Rechtecke ist eine untere Abschätzung der gesuchten Fläche.

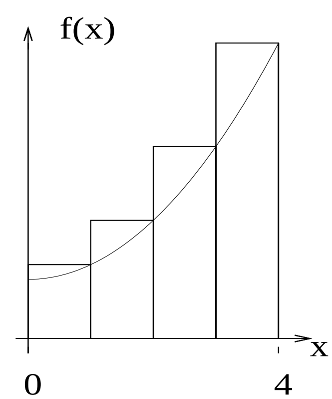


Abbildung 14.9: Die Fläche der rechten Rechtecke ist eine obere Abschätzung der gesuchten Fläche.

Oder ganz viele Rechtecke: Abb. 14.10.

Um die Fläche zwischen der Kurve und der x-Achse zu bestimmen, muss man nur noch die Flächen der Rechtecke addieren. Dann hat man jeweils eine obere und eine untere Grenze für die Flächen.

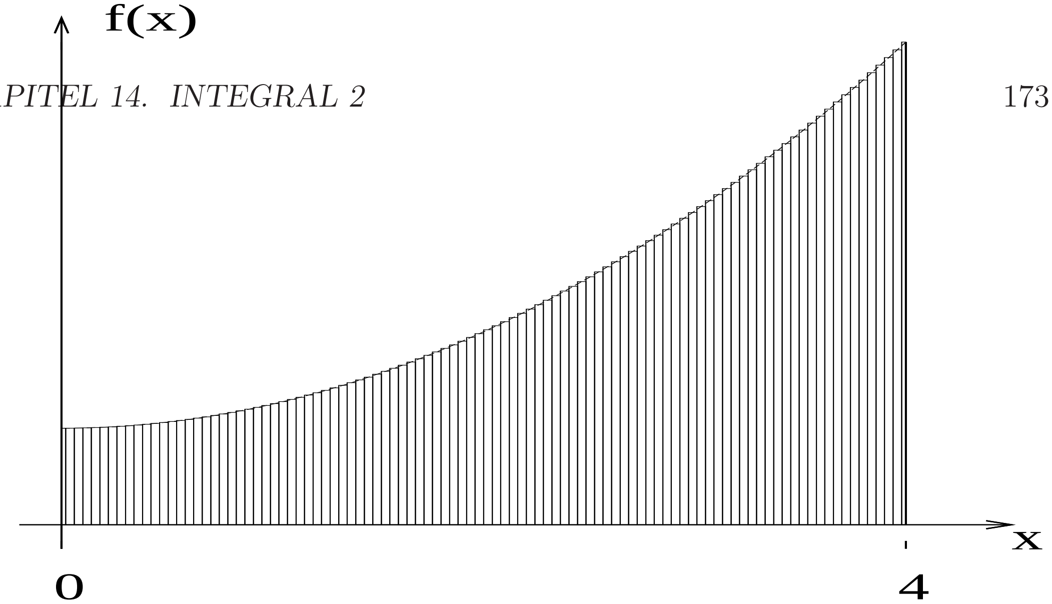


Abbildung 14.10: Der Fehler bei der Berechnung der Fläche wird bei kleinerer Breite der Rechtecke immer kleiner. Die Funktion wurde stark vergrößert, um den Effekt besser sehen zu können.

Die Fläche, welche durch die Rechtecke gebildet wird, die zu groß sind (die rechten Bilder) nennt man die **Obersumme**.

Die Fläche, welche durch die Rechtecke gebildet wird, die zu klein sind (die linken Bilder) nennt man die **Untersumme**.

Die gesuchte Fläche ist dann der Grenzwert der Summe der Rechtecksflächen, wenn die Anzahl der Rechtecke unendlich wird.

Wenn n die Anzahl der Rechtecke ist, dann hat jedes Rechteck die Breite $\frac{4-0}{n}$. Die Differenz der Grenzen (4-0) ist die Länge der gesuchten Fläche, welche in n Rechtecke aufgeteilt wird.

Die Höhe der jeweiligen Rechtecke ist der y-Wert der Funktion von der jeweiligen Stelle:

Hier ein Schema, wie die Untersumme berechnet wird:

1. Rechteck: Breite: $\frac{4-0}{n}$
   Höhe: $f(0)$

2. Rechteck: Breite: $\frac{4-0}{n}$
   Höhe: $f(\text{Breite}) = f(\frac{4-0}{n})$

3. Rechteck: Breite: $\frac{4-0}{n}$
   Höhe: $f(2 \cdot \text{Breite}) = f(2 \cdot \frac{4-0}{n})$

4. Rechteck: Breite: $\frac{4-0}{n}$
   Höhe: $f(3 \cdot \text{Breite}) = f(3 \cdot \frac{4-0}{n})$

Wenn man die Breite der jeweiligen Rechtecke dx nennt, dann berechnet sich die Summe gerade durch:

$$A(4) = \int_0^4 f(x)\,dx$$

oder mit variablen Grenzen:

$$A(k) = \int_0^k f(x)\,dx$$

mit: $A(k)$ als Fläche zwischen der Kurve $f(x)$ und der x-Achse.
(Beachten Sie, dass die Fläche eine Funktion von der Variablen k ist, f dagegen eine Funktion der Variablen x ist. Es hat also ein Variablenwechsel stattgefunden.)

Das Integral bedeutet die Summe über $f(x)$ jeweils multipliziert mit dx.

14.0.2 Flächenberechnung

Berechnet man die Fläche zwischen dem Graphen von $f(x) = 2x$ und der x-Achse zwischen 0 und 2:

$$\int_0^2 2x\,dx = x^2\Big|_0^2 = 4 - 0 = 4$$

Dies stimmt mit den Formeln der Flächenberechnung für Dreiecke überein:

$$A = \frac{g \cdot h}{2} = \frac{2 \cdot 4}{2} = 4$$

Berechnet man jedoch die Fläche zwischen -2 und 0 so passiert merkwürdiges:

$$\int_{-2}^0 2x\,dx = x^2\Big|_{-2}^0 = 0 - 4 = -4$$

Die Fläche unterhalb der x-Achse zählt negativ!

Wenn man also die Fläche zwischen dem Graphen einer Funktion $f(x)$ und der x-Achse berechnen will, muss man folgendermaßen vorgehen:

1. Berechnen der Nullstellen von $f(x)$.

2. Über jedes Teilstück einzeln integrieren.

3. Die Beträge der Flächenstücke summieren.

Beispiel: Gesucht ist die Fläche zwischen der Funktion $f(x) = x^2 - 4$ und der x-Achse in den Grenzen zwischen -5 und 6.

1. **Berechnen der Nullstellen von $f(x)$.**

$$\begin{array}{rcl} f(x) & = & 0 \\ x^2-4 & = & 0 \\ x^2 & = & 4 \\ x=-2 & \text{oder} & x=2 \end{array}$$

2. **Über jedes Teilstück einzeln integrieren.**

$$A_1 = \int_{-5}^{-2} f(x)\,dx = \frac{1}{3}x^3 - 4x\Big|_{-5}^{-2} = \frac{-8}{3} + 8 - \left(\frac{-125}{3} + 20\right) = \frac{81}{3}$$
$$A_2 = \int_{-2}^{2} f(x)\,dx = \frac{1}{3}x^3 - 4x\Big|_{-2}^{2} = \frac{8}{3} - 8 - \left(\frac{-8}{3} + 8\right) = \frac{8}{3} - 8 + \frac{8}{3} - 8 = \frac{-32}{3}$$
$$A_3 = \int_{2}^{6} f(x)\,dx = \frac{1}{3}x^3 - 4x\Big|_{2}^{6} = \frac{216}{3} - 24 - \left(\frac{8}{3} - 8\right) = \frac{216}{3} - 24 - \frac{8}{3} + 8 = \frac{160}{3}$$

3. **Die Beträge der Flächenstücke summieren.**

$$A = |A_1| + |A_2| + |A_3| = \frac{81}{3} + \frac{32}{3} + \frac{160}{3} = 91$$

4. Die Fläche beträgt 91 E.

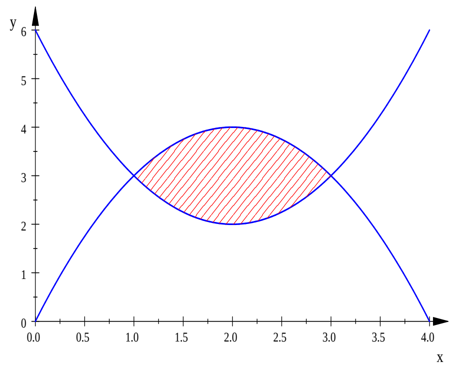


Abbildung 14.11: $f(x) = -(x-2)^2+4$,
$g(x) = (x-2)^2+2$
Die Fläche zwischen dem Graphen von f und von g soll berechnet werden.

14.1 Fläche zwischen zwei Graphen

Manchmal wird eine Fläche zwischen zwei Graphen gesucht: Die von den Graphen von f und g eingeschlossene Fläche sei gesucht.

$$f(x) = -(x-2)^2 + 4$$
$$g(x) = (x-2)^2 + 2$$

Die Lösung dieser Aufgabe fällt leicht, wenn man sich vor Augen hält, dass Flächen (zwischen einem Graphen und der x-Achse) durch Integration berechnet werden.

Schauen wir uns also die Graphen der Funktionen und ihre zugehörigen Flächen einzeln an:

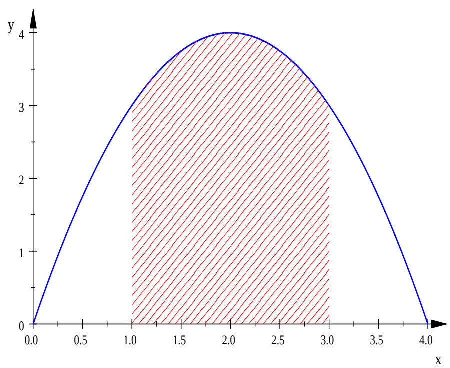


Abbildung 14.12: $f(x) = -(x-2)^2 + 4$
Die Fläche zwischen dem Graphen von f und der x-Achse.

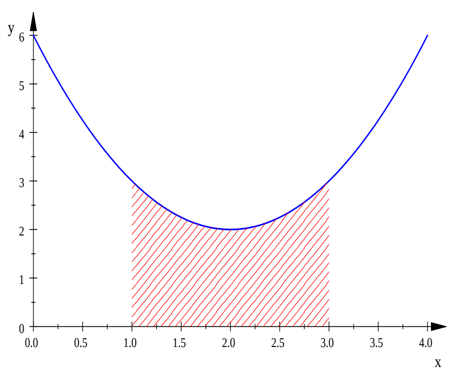


Abbildung 14.13: $g(x) = (x-2)^2 + 2$
Die Fläche zwischen dem Graphen von g und der x-Achse.

Die gesuchte Fläche zwischen den Graphen von f und g erhält man, indem man die schraffierten Flächen aus Abb. 14.12 und Abb. 14.13 voneinander abzieht.

$$A = \int_a^b f(x) - g(x)\,dx$$

Wir wissen hier, dass $f(x) > g(x)$ gilt, in dem zu untersuchenden Intervall. Wenn man das nicht genau weiß, muss man das Integral mit Betragsstrichen umkleiden:

$$A = \left| \int_a^b f(x) - g(x)\,dx \right|$$

Die Grenzen des Integrals erhält man, indem man zuerst die Schnittpunkte ausrechnet.

Vorgehen:

1. Bestimmen der Schnittpunkte von f und g.

2. Bestimmen der Integrale über die einzelnen Teilabschnitte.

Lösung:

1. Bestimmen der Schnittpunkte von f und g.

$$\begin{array}{rcll}
f(x) & = & g(x) & \\
-(x-2)^2+4 & = & (x-2)^2+2 & \mid\ +(x-2)^2 \\
4 & = & 2(x-2)^2+2 & \mid\ -2 \\
2 & = & 2(x-2)^2 & \mid\ :2 \\
1 & = & (x-2)^2 & \mid \\
x-2=-1 & \text{oder} & x-2=1 & \mid\ +2 \\
x=1 & \text{oder} & x=3 & \mid\ +2
\end{array}$$

Die Schnittstellen sind bei $x = 1$ und bei $x = 3$.

2. Bestimmen der Integrale über die einzelnen Teilabschnitte.

$$
\begin{aligned}
A &= \int_1^3 f(x) - g(x)\,dx \\
A &= \int_1^3 -(x-2)^2 + 4 - [(x-2)^2 + 2]\,dx \\
A &= \int_1^3 -(x-2)^2 + 4 - (x-2)^2 - 2\,dx \\
A &= \int_1^3 -2(x-2)^2 + 2\,dx \\
A &= \int_1^3 -2(x^2 - 4x + 4) + 2\,dx \\
A &= \int_1^3 -2x^2 + 8x - 8 + 2\,dx \\
A &= \int_1^3 -2x^2 + 8x - 6\,dx \\
A &= -\frac{2}{3}x^3 + 4x^2 - 6x \Big|_1^3 \\
A &= \frac{8}{3}
\end{aligned}
$$

Wenn Sie die Fläche zwischen zwei Kurven berechnen wollen, ist es egal, ob sich die Flächen unterhalb der x-Achse befinden.

(Wenn Sie die Fläche bestimmen wollen, welche von dem Graphen einer Funktion f und der x-Achse eingeschlossen ist, dann bestimmen Sie die Fläche zwischen den Graphen von f und der Funktion $g(x) = 0$.) Diesess Verfahren funktioniert genauso, selbst, wenn der Graph einer Funktion unterhalb der x-Achse sich befindet!

14.2 Mittelwert

In diesem Abschnitt soll der Mittelwert der Funktionswerte einer Funktion in einem Intervall berechnet werden.

Zuerst untersuchen wir ein Beispiel, welches einfach zu lösen ist:

Wie groß ist die Durchschnittsgeschwindigkeit, wenn jemand 2 Stunden lang 10 km/h fährt und dann eine Stunde 20 km/h schnell ist (siehe Abb. 14.14).

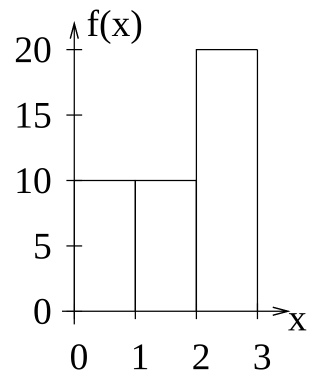


Abbildung 14.14

Der Mittelwert wird bestimmt indem Sie zuerst die Strecke ausrechnen und dann durch die benötigte Zeit teilen:

$$\text{Strecke} = 10\,\frac{\text{km}}{\text{h}} \cdot 1\,\text{h} + 10\,\frac{\text{km}}{\text{h}} \cdot 1\,\text{h} + 20\,\frac{\text{km}}{\text{h}} \cdot 1\,\text{h} = 40\,\text{km}$$

$$mw = \frac{40\,\text{km}}{3\,\text{h}}$$

Die Strecke ist die Summe der Flächen der Rechtecke. Eine Rechtecksfläche ist jeweils der Funktionswert $f(x)$ multipliziert mit der Breite (dx).

Wenn man nun eine beliebige Kurve hat, so kann man diese Kurve wieder durch unendlich viele Rechtecke nähern und dann deren Fläche berechnen. Dies ist aber gerade das Integral.

Also ergibt sich der Mittelwert:

$$mw = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\,dx$$

14.3 Formalia

Die Stammfunktion zu $f(x)$ wird in der Regel geschrieben als F(x):

$$F(x) = \int f(x)\,dx$$

Dies ist zwar praktisch, aber so eigentlich nicht richtig, denn es müssen ja eigentlich die Grenzen des Integrals eingesetzt werden.

Eigentlich muss man einen Variablenwechsel vollziehen:

$$F(x) = \int_0^x f(k)\,dk$$

oder anders:

$$F(k) = \int_0^k f(x)\,dx$$

14.4 Rotationsvolumen

In diesem Abschnitt untersuchen wir das Volumen, welches entsteht, wenn der Graph einer Funktion $f(x)$ um die x-Achse gedreht wird.

In einem zweiten Schritt werden wir dann untersuchen, wie man das Volumen ermitteln kann, wenn der Graph einer Funktion um die y-Achse gedreht wird.

14.4.1 Rotation um die x-Achse

Wir unterteilen dazu die Fläche unter der Funktion wieder in Rechtecke. Wenn diese Rechtecke rotieren, bilden Sie kleine Zylinder die auf der Seite stehen.

Der Radius jedes der Zylinder ist gerade $f(x)$. Dann ist das Volumen die Summe der Volumen der einzelnen Zylinder.

$$V_{\text{Zyl}} = \pi r^2 h$$

r: Radius, h Höhe des Zylinders. In unserem Fall:

$$V_{\text{Zyl}} = \pi[f(x)]^2 h$$

Die Höhe h des Zylinders ist gerade dx Und um alle Zylinder aufzuaddieren benötigt man die Summe aller Zylinder.

Dies leistet das Integral:

$$V = \int_a^b \pi\left[f(x)\right]^2\,dx$$

Beispiel:

Wenn man den Graph der Funktion $f(x) = \sqrt{2x}$ mit $0 \leq x \leq 1$ um die x-Achse dreht, entsteht ein Rotationsvolumen.

$$V = \int_0^1 \pi\left[\sqrt{2x}\right]^2\,dx = \int_0^1 \pi 2x\,dx = \pi x^2\Big|_0^1 = \pi$$

14.4.2 Rotation um die y-Achse

Nun muss man zuerst die Umkehrfunktion bilden. Diese dreht sich dann um die x-Achse und dann kann man das entsprechende Volumen errechnen.

Beispiel:
Der Graph der Funktion $f(x) = x^2$ dreht sich um die y-Achse. Die entstehende Figur soll 4 cm hoch sein.

Bestimmen der Umkehrfunktion:

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 \\ y &= x^2 \\ \sqrt{y} &= x \\ g(x) &= \pm\sqrt{x} \end{aligned}$$

g sei die Umkehrfunktion zu f.

0 und 4 sind y-Werte von f(x). Also muss $g(x)$ von 0 bis 4 integriert werden.

$$V = \int_0^4 \pi \left[\sqrt{x}\right]^2 dx = \int_0^4 \pi x \, dx = 8\pi$$

14.5 Uneigentliche Integrale

Uneigentliche Integrale sind dadurch gekennzeichnet, dass mindestens eine ihrer Grenzen unendlich groß wird:

Gegeben sei die Kurve $f(x) = \frac{1}{x^2}$ (siehe Abb. 14.15). Gesucht ist die Fläche zwischen dem Graph von f und der x-Achse im Intervall [1;b].

$$A = \int_1^b \frac{1}{x^2} \, dx$$

Zuerst muss die Stammfunktion erstellt werden:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{x^2} \\ &= x^{-2} \\ F(x) &= \frac{1}{-1} x^{-1} \\ &= \frac{-1}{x} \\ F(b) &= \frac{-1}{b} \\ F(1) &= \frac{-1}{1} = -1 \end{aligned}$$

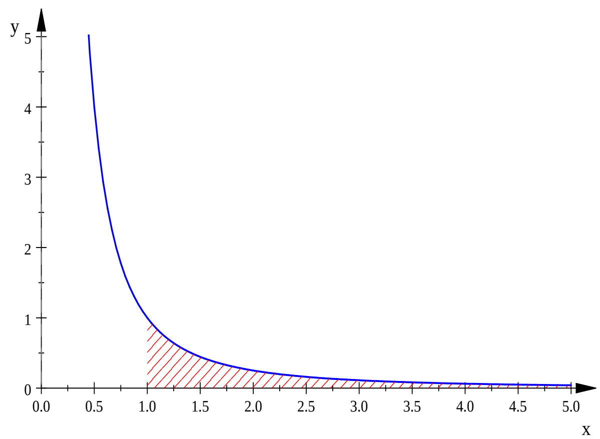


Abbildung 14.15: $f(x) = \frac{1}{x^2}$
Die schraffierte Fläche zwischen dem Graphen und der x-Achse soll ab x=1 bestimmt werden. Da bei großen x-Werten sich der Graph immer mehr der x-Achse nähert, kommt immer weniger Fläche dazu. Interessanterweise ist die Fläche nicht unendlich groß sondern auf 1 begrenzt.

$$\begin{aligned} A &= \int_1^b \frac{1}{x^2}\,dx \\ &= F(b) - F(1) \\ &= \frac{-1}{b} - (-1) \\ &= \frac{-1}{b} + 1 \\ &= 1 - \frac{1}{b^2} \end{aligned}$$

Wie groß wird die Fläche nun maximal?
Die Fläche wird immer größer, je größer b wird. Für die maximale Fläche betrachten wir den Grenzwert für b gegen unendlich:

$$A_{\max} = \lim_{b\to\infty} 1 - \frac{1}{b} = 1$$

Die Fläche ist begrenzt! Sie wird nicht unendlich groß, sondern ihr Grenzwert beträgt 1 FE.

14.6 Arbeitsblätter

14.6.1 Potenzielle Energie

Wir untersuchen die Energie, die aufgebracht werden muss, um eine Kugel von der Erde aus in den Weltraum zu bringen. Dasselbe Problem – mit derselben Lösung – stellt sich auch bei elektostatisch geladenen Kugeln.

Bekannt ist aus der Physik die Arbeit, die benötigt wird, um ein Objekt der Masse m um die Höhe h zu heben:

$$W = mgh$$

W	geleistete Arbeit in J (Joule)	m	Masse des Objekts in kg
g	Erdbeschleunigung 9,81 $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$	h	Höhe in m

Die geleistete Arbeit ist gleich der Energie, welche frei wird, wenn das Objekt zurückfällt. Energie bzw. Arbeit wird in Joule gemessen.

Das Problem ist, dass diese Formel nur für kleine Höhenunterschiede gilt bei denen die Erdbeschleunigung konstant bleibt. Je weiter das Objekt weg ist, desto kleiner ist die Erdbeschleunigung. Wenn Sie eine Kugel in ganz großer Entfernung loslassen, dann bewegt sie sich nur ganz langsam in Richtung Erde.

Arbeit allgemein ist definiert als: Arbeit = Kraft × Weg

Bei großen Höhenunterschieden ändert sich die benötigte Kraft. Am Anfang benötigt man sehr viel Kraft. Wenn man weiter weg ist, benötigt man sehr viel weniger Kraft. Diese Formel stimmt also immer nur für kleine Wegabschnitte bei denen man die Kraft näherungsweise als konstant ansehen kann.

Die jeweilig benötigte Kraft (bei der Erde) erhält man durch

$$F = G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}$$

G	=	Gravitationskonstante:	=	$6{,}67 \cdot 10^{-11}\,\frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{kg\,s}^2}$
m_1	=	m_{Erde}	=	$6 \cdot 10^{24}\,\mathrm{kg}$
m_2	=	Masse der Kugel		
r	=	Abstand zwischen Erde und Kugel		

Wir können also immer nur für ein kleiner Stück Weg (dx) die Arbeit berechnen und müssen diese vielen Arbeitsstücke addieren.

Dies leistet gerade das Integral:

Die Arbeit um ein Objekt von der Entfernung a zur Entfernung b zu bringen beträgt dann:

$$W = \int_a^b G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{x^2}\,dx = G \cdot m_1 \cdot m_2 \int_a^b \frac{1}{x^2}\,dx$$

Da G, m_1, m_2 Konstanten sind gilt: In unserem Fall ist m_1 die Masse der Erde und die Masse m_2 die Masse der Kugel.

1. Bestimmen Sie die Arbeit, die benötigt wird, um eine Kugel (10 kg) von der Erde (6.500.000 m vom Mittelpunkt entfernt) um 1000 bzw. 10.000 Meter zu heben.

2. Vergleichen Sie Ihr Ergebnis mit der Näherung: $E_{pot} = mgh$.

3. Bestimmen Sie die Energie, die man benötigt, um die Kugel auf eine Höhe von k Metern zu heben.

4. Bestimmen Sie die Energie, um die Kugel bis ins Unendliche zu verschieben?

Lösung

1. 1000 m:

$$W_{1.000} = \int_{6.500.000\,\mathrm{m}}^{6.501.000\,\mathrm{m}} 6{,}67 \cdot 10^{-11}\,\frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{kg\ s}^2}\frac{10\,\mathrm{kg} \cdot 6 \cdot 10^{24}\,\mathrm{kg}}{x^2}\,dx = 94.707\,\mathrm{J}$$

$$E_{\mathrm{pot}}(1.000) = mgh = 10\,\mathrm{kg} \cdot 9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot 1.000\,\mathrm{m} = 98.100\,\mathrm{J}$$

2. 10.000 m:

$$W_{10.000} = \int_{6.500.000\,\mathrm{m}}^{6.510.000\,\mathrm{m}} 6{,}67 \cdot 10^{-11}\,\frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{kg\ s}^2}\frac{10\,\mathrm{kg} \cdot 6 \cdot 10^{24}\,\mathrm{kg}}{x^2}\,dx = 94.5763\,\mathrm{J}$$

$$E_{\mathrm{pot}}(10.000) = mgh = 10\,\mathrm{kg} \cdot 9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot 10.000\,\mathrm{m} = 981.000\,\mathrm{J}$$

3. k:

$$W_k = \int_{6.500.000\,\mathrm{m}}^{k} 6{,}67 \cdot 10^{-11}\,\frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{kg\ s}^2}\frac{10\,\mathrm{kg} \cdot 6 \cdot 10^{24}\,\mathrm{kg}}{x^2}\,dx$$

$$W_k = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\,\frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{kg\ s}^2} \cdot 10\,\mathrm{kg} \cdot 6 \cdot 10^{24}\,\mathrm{kg} \int_{6.500.000\,\mathrm{m}}^{k} \frac{1}{x^2}\,dx$$

$$W_k = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\,\frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{kg\ s}^2} \cdot 10\,\mathrm{kg} \cdot 6 \cdot 10^{24}\,\mathrm{kg} \cdot \left(\frac{-1}{k} - \frac{-1}{6.500.000\,\mathrm{m}}\right)$$

$$W_k = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\,\frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{kg\ s}^2} \cdot 10\,\mathrm{kg} \cdot 6 \cdot 10^{24}\,\mathrm{kg} \cdot \left(-\frac{1}{k} + \frac{1}{6.500.000\,\mathrm{m}}\right)$$

4. Wenn die Höhe unendlich wird:

   Dann gilt:

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} \to 0$$

$$\lim_{k\to\infty} 6{,}67 \cdot 10^{-11}\,\frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{kg\ s}^2} \cdot 10\,\mathrm{kg} \cdot 6 \cdot 10^{24}\,\mathrm{kg} \cdot \left(-\frac{1}{k} + \frac{1}{6.500.000\,\mathrm{m}}\right)$$

$$= 6{,}67 \cdot 10^{-11}\,\frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{kg\ s}^2} \cdot 10\,\mathrm{kg} \cdot 6 \cdot 10^{24}\,\mathrm{kg}\frac{1}{6.500.000\,\mathrm{m}}$$

$$= 615 \cdot 10^6\,\mathrm{J}$$

14.6.2 Ein Glas

Von einem Trinkgefäß sei der äußere Rand gegeben durch die Funktion f:

$$f(x) = x^2$$

x und $f(x)$ seien in cm angegeben.

1. Bestimmen Sie die mittlere Höhe des Gefäßes zwischen 0 und 3.
2. Geben Sie eine Funktion an, die die mittlere Höhe des Gefäßes von 0 bis x angibt.
3. Geben Sie eine Funktion an, die die mittlere Höhe des Gefäßes von $-x$ bis x angibt.
4. Begründen Sie die beiden vorherigen Ergebnisse.
5. Das Glas sei 9 cm hoch welche Querschnittsfläche hat es?
6. Das Glas sei 9 cm hoch, welches Volumen hat es?

14.6.3 Ein Glas – Lösung

Von einem Trinkgefäß sei der äußere Rand gegeben durch die Funktion f:

$$f(x) = x^2$$

x und $f(x)$ seien in cm angegeben.

1. Bestimmen Sie die mittlere Höhe des Gefäßes zwischen 0 und 3.

   Lösung:

   $$\bar{h} = \frac{1}{3}\int_0^3 f(x)\,dx = 3$$

2. Geben Sie eine Funktion an, die die mittlere Höhe des Gefäßes von 0 bis x angibt.

   Lösung:

   $$\bar{m}(x) = \frac{1}{x}\int_0^x z^2\,dz = \frac{1}{x}(\frac{1}{3}x^3) = \frac{1}{3}x^2$$

3. Geben Sie eine Funktion an, die die mittlere Höhe des Gefäßes von $-x$ bis x angibt.

   Lösung:

   $$\bar{m}(x) = \frac{1}{x-(-x)}\int_{-x}^x z^2\,dz = \frac{1}{2x}(\frac{1}{3}x^3 - \frac{-1}{3}x^3) = \frac{1}{3}x^2$$

4. Begründen Sie die beiden vorherigen Ergebnisse.

   Lösung:
   Die Funktion ist achsensymmetrisch. Wenn die mittlere Höhe rechts von der y-Achse eine bestimmte Zahl ergibt, dann ist links von der y-Achse die mittlere Höhe dieselbe Zahl.

   Wenn man dann die gesamte Funktion betrachtet, ändert sich die mittlere Höhe nicht.

5. Das Glas sei 9 cm hoch welche Querschnittsfläche hat es?

   Lösung:

   $$\begin{array}{rcl} f(x) & = & 9 \\ x^2 & = & 9 \\ x = -3 & \text{od.} & x = 3 \end{array}$$

   $$A = \int_{-3}^3 9 - x^2\,dx = 36$$

   Die Querschnittsfläche beträgt 36 cm^2

6. Das Glas sei 9 cm hoch, welches Volumen hat es?

   Lösung:
   Zuerst wird die Umkehrfunktion bestimmt:

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 \\ y &= x^2 \\ \sqrt{y} &= x \\ g(x) &= \sqrt{x} \end{aligned}$$

$$V = \int_0^9 \pi(\sqrt{x})^2\,dx = \int_0^9 \pi x\,dx = \frac{81\pi}{2}$$

   Das Volumen beträgt ca. 127 cm^3.

14.6.4 Strandprofil

K sei der Graph der Funktion $f(x)$ (siehe Abb. 14.16).

$$f(x) = x^3 - 15x^2 + 50x$$

Dieser Graph modelliert ein Strandprofil im Intervall [0:11.5]. 1 Einheit entspricht 10 Meter in x-Richtung und 0,5 m in y-Richtung.

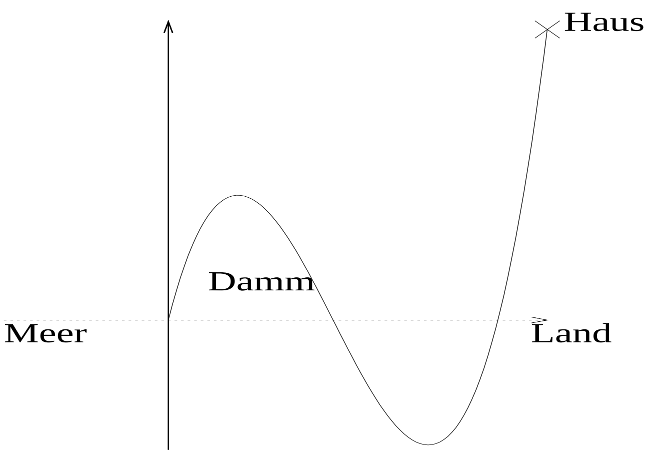


Abbildung 14.16: Ein Strandprofil. Die y-Achse trennt das Meer und das Land in dem Modell.

Das Meer ist im negativen Bereich, das Land im positiven.

1. Bestimmen Sie die Orte (rechnerisch), wo die Meereshöhe erreicht ist.
2. Ihr Haus steht 115 Meter vom Strand entfernt. Bei welcher Sturmfluthöhe wird Ihr Haus weggespült?
3. Geben Sie an, bis zu welcher Sturmfluthöhe der Deich Sie sichert.
4. Um zu wandern interessiert Sie, welche Höhenunterschiede bei einer Wanderung zum Strand zu bewältigen sind.
5. Bestimmen Sie die mittlere Höhe bei einer Wanderung vom Strand zum Haus.
6. Geben Sie eine Funktion für die mittlere Höhe vom Strand aus an.
7. Nach einer Sturmflut ist das Tal vor Ihrem Haus mit Wasser gefüllt. Ermitteln Sie die Querschnittsfläche. (Das Tal ist bis zur Dünenspitze mit Wasser gefüllt.) (f(10,77) = 48,11)

14.6.5 Strandprofil – Lösung

K sei der Graph der Funktion $f(x)$.

$$f(x) = x^3 - 15x^2 + 50x$$

Dieser Graph modelliert ein Strandprofil im Intervall [0:11.5]. 1 Einheit entspricht 10 Meter in x-Richtung und 0,5 m in y-Richtung.

Das Meer ist im negativen Bereich.

1. Bestimmen Sie die Orte (rechnerisch), wo Meereshöhe erreicht ist.

   Lösung:

   $$\begin{aligned} f(x) &= 0 \\ x^3 - 15x^2 + 50x &= 0 \\ x(x^2 - 15x + 50) &= 0 \end{aligned}$$

   $$x = 0, \quad x = 5, \quad x = 10$$

   Meereshöhe ist in 0, 50 und 100 Meter Entfernung vom Strand erreicht.

2. Ihr Haus steht 115 Meter vom Strand entfernt. Bei welcher Sturmfluthöhe wird Ihr Haus weggespült?

   Lösung:

   $$f(11{,}5) = 112$$

   Ab einer Wellenhöhe von 56 Metern wirds nass.

3. Geben Sie an, bis zu welcher Sturmfluthöhe der Deich Sie sichert.

   Lösung:
   Gesucht ist ein Extremum.

   $$\begin{aligned} f(x) &= x^3 - 15x^2 + 50x \\ f'(x) &= 3x^2 - 30x + 50 \\ f''(x) &= 6x - 30 \end{aligned}$$

   (a) **notwendige Bedingung**: $f'(x) = 0$

   $$\begin{aligned} f'(x) &= 0 \\ 3x^2 - 30x + 50 &= 0 \\ x = 2{,}11 \quad &\text{oder} \quad x = 7{,}89 \end{aligned}$$

   (b) **hinreichende Bedingung**: $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) \neq 0$

   $$\begin{aligned} f'(2{,}11) &= 0 \text{ und} \\ f''(2{,}11) &= 6 \cdot 2{,}11 - 30 < 0 \\ f'(7{,}89) &= 0 \text{ und} \\ f''(7{,}89) &= 6 \cdot 7{,}89 - 60 > 0 \end{aligned}$$

$$f(2{,}11) = 48{,}11$$

Der Deich ist ca. 24 m hoch.

4. Um zu wandern interessiert Sie, welche Höhenunterschiede bei einer Wanderung zum Strand zu bewältigen sind.

   Lösung:
   Das Minimum ist bei (7,89|-48). Das Tal ist 24 m tief unter dem Meeresspiegel. Das Haus steht 56 m über dem Meeresspiegel.

   Sie gehen vom Haus 70 m nach unten, um dann 48 Höhenmeter zu bewältigen um den Deich zu erklimmen.

5. Bestimmen Sie die mittlere Höhe bei einer Wanderung vom Strand zum Haus.

   Lösung:

$$m = \frac{1}{11{,}5} \int_0^{11{,}5} x^3 - 15x^2 + 50x \, dx = 6{,}5$$

   Die mittlere Höhe beträgt 3,25 m.

6. Geben Sie eine Funktion für die mittlere Höhe vom Strand aus an.

   Lösung:

$$m(x) = \frac{1}{x} \int_0^x z^3 - 15z^2 + 50z \, dz$$

$$F(z) = \frac{1}{4}z^4 - 5z^3 + 25z^2$$
$$F(x) = \frac{1}{4}x^4 - 5x^3 + 25x^2$$
$$F(0) = 0$$

$$m(x) = \frac{F(x) - F(0)}{x} = \frac{\frac{1}{4}x^4 - 5x^3 + 25x^2}{x} = \frac{1}{4}x^3 - 5x^2 + 25x$$

7. Nach einer Sturmflut ist das Tal vor Ihrem Haus mit Wasser gefüllt. Ermitteln Sie die Querschnittsfläche.

   (Das Tal ist bis zur Dünenspitze mit Wasser gefüllt.)
   (f(10,77) = 48,11)

   Lösung:
   Die obere Funktion lautet:

$$g(x) = 48{,}11$$

Schnittpunkte zwischen g(x) und f(x):(2,11|48,11) und (10,77|48,11).

$$A = \int_{2{,}11}^{10{,}77} g(x) - f(x)\,dx$$
$$A = \int_{2{,}11}^{10{,}77} 48{,}11 - (x^3 - 15x^2 + 50x)\,dx$$
$$A = 468{,}72$$

Aufgrund des gewählten Maßstabes gilt:

$$A = 469\,E_x \cdot E_y$$

die Einheit in x-Richtung ist 1 m, die Einheit in y-Richtung ist 0,5 m
Die Fläche beträgt ca. 235 m^2.

14.6.6 Ein Blech

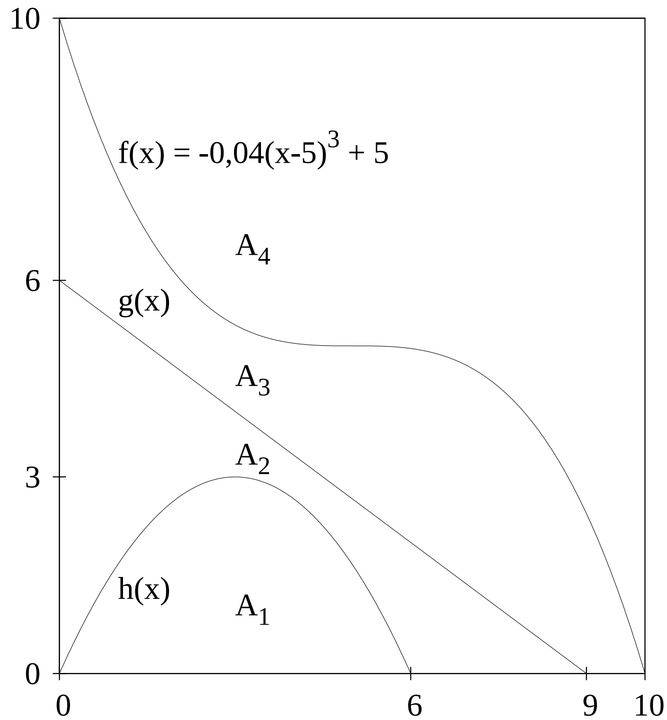


Abbildung 14.17: Ein Blech ist durch ein CAD-Programm in 4 Teilflächen zerschnitten: A_1 bis A_4. $g(x)$ ist eine lineare Funktion und $h(x)$ ist eine quadratische Funktion.

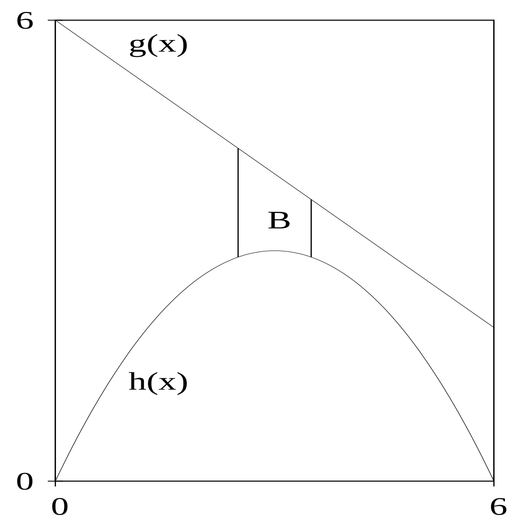


Abbildung 14.18: Ein Ausschnitt aus dem Blech. B ist 1 cm breit.

Ein quadratisches Blech (10 cm breit und lang) wurde durch ein CAD-Programm in vier Teilflächen zerschnitten. Der Sachverhalt ist in Abb. 14.17 dargestellt.

1. $g(x)$ ist eine lineare Funktion. Bestimmen Sie diese.
2. $h(x)$ ist eine quadratische Funktion. Bestimmen Sie diese.
3. Bestimmen Sie die einzelnen Teilflächen.
4. Geben Sie die mittlere Höhe der Fläche von A_1 an.
5. Erstellen Sie eine Funktion, die die mittlere Höhe der Fläche von 0 bis k für h angibt.
6. Zwischen g und h soll ein 1 cm breites Teilstück farbig markiert werden (siehe Abb. 14.18). Bestimmen Sie den Ort, wo die Teilfläche bei einem Zentimeter Breite den minimalen Flächeninhalt hat.

14.6.7 Ein Blech – Lösung

Ein quadratisches Blech (10 cm breit und lang) wurde durch ein CAD-Programm in vier Teilflächen zerschnitten. Der Sachverhalt ist in Abb. 14.19 dargestellt.

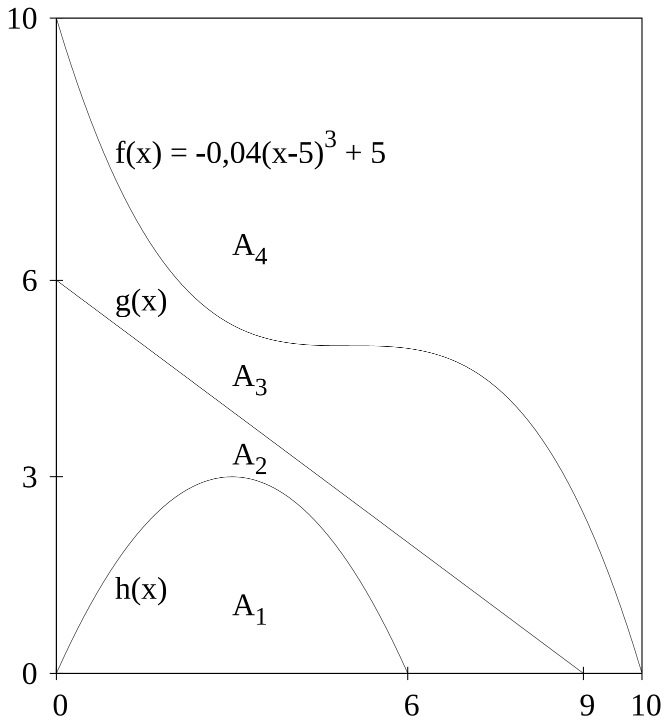


Abbildung 14.19: Ein Blech ist durch ein CAD-Programm in 4 Teilflächen zerschnitten: A_1 bis A_4. $g(x)$ ist eine lineare Funktion und $h(x)$ ist eine quadratische Funktion.

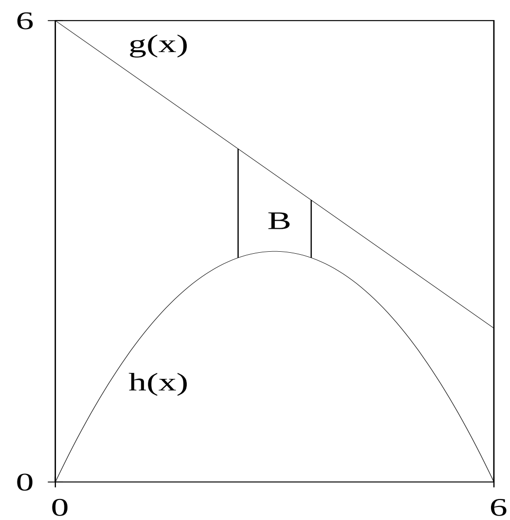


Abbildung 14.20: Ein Ausschnitt aus dem Blech. B ist 1 cm breit.

1. $g(x)$ ist eine lineare Funktion. Bestimmen Sie diese.

   Es sind zwei Punkte bekannt: (0|6) und (9|0).

   Gesucht: $g(x) = mx + b$. b ist der Achsenabschnitt:

   $$g(x) = mx + 6$$

   Die Steigung ist:

   $$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{6}{9} = -\frac{2}{3}$$

   $$g(x) = -\frac{2}{3}x + 6$$

2. $h(x)$ ist eine quadratische Funktion. Bestimmen Sie diese.

   Es sind die Nullstellen der Funktion bekannt und ein weiterer Punkt (der Scheitelpunkt) ist ablesbar.

   Da die Nullstellen bei $x = 0$ und $x = 6$ sind, muss gelten:

$$h(x) = a \cdot x(x-6)$$

   Diese Funktion hat die Nullstellen bei $x_1 = 0$ und $x_2 = 6$. Der x-Wert des Scheitelpunktes ist bei: $\frac{0+6}{2} = 3$. Also in der Mitte der beiden Nullstellen.

$$\begin{aligned} h(3) &= 3 \\ a \cdot 3(3-6) &= 3 \\ -9a &= 3 \\ a &= -\frac{1}{3} \\ h(x) &= -\frac{1}{3}x(x-6) \\ h(x) &= -\frac{1}{3}x^2 + 2x \end{aligned}$$

3. Bestimmen Sie die einzelnen Teilflächen.

   (a) A_1:

$$A_1 = \int_0^6 h(x)\,dx = \int_0^6 -\frac{1}{3}x^2 + 2x\,dx = -\frac{1}{9}x^3 + x^2\Big|_0^6 = -24 + 36 = 12$$

   (b) A_2: Hier werden zwei Alternativen vorgeführt. Sie können entweder einfach nur die Fläche unter der Geraden berechnen und dann A_1 abziehen oder A_2 als Fläche zwischen den beiden Graphen auffassen.

   i. Die Fläche unter der Geraden ist:

$$A_g = \int_0^9 g(x)\,dx = \int_0^9 -\frac{2}{3}x + 6\,dx = -\frac{1}{3}x^2 + 6x\Big|_0^9 = -27 + 54 = 27$$

   Die Fläche unter der Geraden lässt sich auch als Dreieck ermitteln:

$$A_g = \frac{6 \cdot 9}{2} = 27$$

$$A_2 = A_g - A_1 = 27 - 12 = 15$$

   ii.

$$A_2 = \int_0^6 g(x) - h(x)\,dx + \int_6^9 h(x)\,dx$$

(c) A_3:

i. Die Funktion ist eigentlich eine x^3 Funktion, um 5 nach rechts und 5 nach oben verschoben. Sie ist also punktsymmetrisch um (5|5). Damit teilt sie das Quadrat in zwei gleiche Teile. Damit ist A_4 $50\,\mathrm{cm}^2$ groß und die Fläche unter $f(x)$ ist ebenfalls $50\,\mathrm{cm}^2$.

$$A_3 = 50 - A_1 - A_2 = 13$$

ii. Ermitteln der Fläche unter $f(x)$ und dann die anderen Flächen abziehen:

$$\int_0^{10} f(x)\,dx = 50$$

$$g(x) = -\frac{6}{9}x + 6$$
$$\int_0^{9} g(x)\,dx = 27$$

Einsetzen ergibt:

$$\begin{aligned} A_3 &= \int_0^{10} f(x)\,dx - \int_0^{9} g(x)\,dx \\ &= 50 - 27 \\ &= 13 \end{aligned}$$

Beachten Sie, dass die Integrale unterschiedliche Grenzen haben. Darum können Sie diese nicht einfach zusammenziehen unter einem Integralzeichen.

(d) A_4:

i. Sie benutzen Ihre Kenntnis über die Fläche unter der Kurve $f(x)$.

$$A_4 = 100 - 50 = 50$$

ii. Oder direkt:
Die oberer Kante kann als folgende Funktion dargestellt werden:

$y = 10$:

$$\begin{aligned}
A_4 &= \int_0^{10} 10 - f(x)\,dx \\
&= \int_0^{10} 10 - (-0{,}04(x-5)^3 + 5)\,dx \\
&= \int_0^{10} 10 + 0{,}04(x-5)^3 - 5\,dx \\
&= \int_0^{10} 5 + 0{,}04(x-5)^3\,dx \\
&= 5x + 0{,}01(x-5)^4\Big|_0^{10} \\
&= F(10) - F(0) \\
&= 50 + 0{,}01 \cdot 625 - 0{,}01 \cdot 625 \\
&= 50
\end{aligned}$$

4. Geben Sie die mittlere Höhe der Fläche von A_1 an.

   Die Fläche (= das Integral) haben Sie oben schon berechnet!

   Die Fläche beträgt 12 FE und die Fläche ist 6 E breit:

$$mw = \frac{1}{6}\int_0^6 h(x)\,dx = \frac{1}{6} \cdot 12 = 2$$

5. Erstellen Sie eine Funktion, die die mittlere Höhe der Fläche von 0 bis k für h angibt.

$$\begin{aligned}
mw(k) &= \frac{1}{k}\int_0^k h(x)\,dx \\
&= \frac{1}{k}\int_0^k -\frac{1}{3}x^2 + 2x\,dx \\
&= \frac{1}{k}\left[-\frac{1}{9}x^3 + x^2\right]_0^k \\
&= \frac{1}{k}\left(-\frac{1}{9}k^3 + k^2\right) \\
&= -\frac{1}{9}k^2 + k
\end{aligned}$$

6. Zwischen g und h soll ein 1 cm breites Teilstück farbig markiert werden (siehe Abb. 14.20). Bestimmen Sie den Ort, wo die Teilfläche bei einem Zentimeter Breite den minimalen Flächeninhalt hat.

Vorbemerkung: Von dem Pascalschen Dreieck wissen wir:

$$(a+1)^3 = a^3 + 3a^2 + 3a + 1$$

Somit gilt auch:

$$\frac{1}{9}(a+1)^3 = \frac{1}{9}a^3 + \frac{1}{3}a^2 + \frac{1}{3}a + \frac{1}{9}$$

Gesucht ist die Fläche von einer beliebigen Stelle a bis um 1 nach rechts: $a+1$. Diese Fläche soll eine Funktion k(a) angeben.

k(2) ist dann die Fläche zwischen der Funktion g und h von 2 bis 3.
k(3) ist dann die Fläche zwischen der Funktion g und h von 3 bis 4.
usw.

Gesucht ist dann anschließend, wann diese Funktion k minimal wird.

$$k(x) = \int_a^{a+1} g(x) - h(x)\,dx$$
$$k(x) = \int_a^{a+1} -\frac{2}{3}x + 6 - (-\frac{1}{3}x^2 + 2x)\,dx$$
$$k(x) = \int_a^{a+1} -\frac{2}{3}x + 6 + \frac{1}{3}x^2 - 2x\,dx$$
$$k(x) = \int_a^{a+1} \frac{1}{3}x^2 - \frac{8}{3}x + 6\,dx$$
$$k(x) = \frac{1}{9}x^3 - \frac{4}{3}x^2 + 6x\Big|_a^{a+1}$$
$$k(x) = \frac{1}{9}(a+1)^3 - \frac{4}{3}(a+1)^2 + 6(a+1) - \left(\frac{1}{9}a^3 - \frac{4}{3}a^2 + 6a\right)$$
$$k(x) = \frac{1}{9}(a+1)^3 - \frac{4}{3}(a+1)^2 + 6(a+1) - \frac{1}{9}a^3 + \frac{4}{3}a^2 - 6a$$
$$k(x) = \frac{1}{9}a^3 + \frac{1}{3}a^2 + \frac{1}{3}a + \frac{1}{9} - \frac{4}{3}(a+1)^2 + 6(a+1) - \frac{1}{9}a^3 + \frac{4}{3}a^2 - 6a$$
$$k(x) = \frac{1}{3}a^2 + \frac{1}{3}a + \frac{1}{9} - \frac{4}{3}(a+1)^2 + 6(a+1) + \frac{4}{3}a^2 - 6a$$
$$k(x) = \frac{1}{3}a^2 + \frac{1}{3}a + \frac{1}{9} - \frac{4}{3}(a^2 + 2a + 1) + 6a + 6 + \frac{4}{3}a^2 - 6a$$
$$k(x) = \frac{1}{3}a^2 + \frac{1}{3}a + \frac{1}{9} - \frac{4}{3}a^2 - \frac{8}{3}a - \frac{4}{3} + 6 + \frac{4}{3}a^2$$
$$k(x) = \frac{1}{3}a^2 + \frac{1}{3}a + \frac{1}{9} - \frac{8}{3}a - \frac{4}{3} + 6$$
$$k(x) = \frac{1}{3}a^2 - \frac{7}{3}a - \frac{11}{9} + 6$$
$$k(x) = \frac{1}{3}a^2 - \frac{7}{3}a + \frac{43}{9}$$

(a) Ableitungen:

$$\begin{aligned} k(x) &= \frac{1}{3}a^2 - \frac{7}{3}a + \frac{43}{9} \\ k'(x) &= \frac{2}{3}a - \frac{7}{3} \\ k''(x) &= \frac{2}{3} \end{aligned}$$

(b) notwendige Bedingung: $k'(x) = 0$

$$\begin{aligned} k'(x) &= 0 \\ \frac{2}{3}a - \frac{7}{3} &= 0 \\ \frac{2}{3}a &= \frac{7}{3} \\ a &= 3{,}5 \end{aligned}$$

Bei $x = 3{,}5$ ist eine mögliche Extremstelle.

(c) hinreichende Bedingung: $k'(x_0) = 0$ und $k''(x_0) \neq 0$

$$k'(3{,}5) = 0 \text{ und } k''(3{,}5) = \frac{2}{3} > 0$$

Es handelt sich also um ein Minimum.

Es geht auch die Argumentation, dass $k(x)$ ein quadratische Funktion hat, die keinen Wendepunkt haben kann. Da der Vorfaktor positiv ist, ist der Scheitelpunkt ein Minimum.

Die Fläche mit der Breite 1 zwischen $g(x)$ und $h(x)$ wird minimal, wenn sie von $x = 3{,}5$ bis $x = 4{,}5$ geht.

14.6.8 Figur

Ein Künstler möchte eine Figur bauen. Eine Skizze ist in Abb. 14.21 dargestellt. Die Figur soll aus verschiedenem Material und damit unterschiedlichen Farben entstehen. A_0 soll aus Kieferholz bestehen und durch eine Parabel (f) begrenzt sein, A_1 soll aus Birkenholz und A_2 soll aus Eiche bestehen. Die Trennlinie zwischen A_1 und A_2 soll senkrecht auf die Parabel bei einem Viertel der Gesamtlänge treffen. Insgesamt ist die Figur symmetrisch. Darüber hinaus soll die Figur 4 m breit und hoch sein und 5 cm dick sein.

$$f(x) = -0{,}2 \cdot x \cdot (x-8)$$

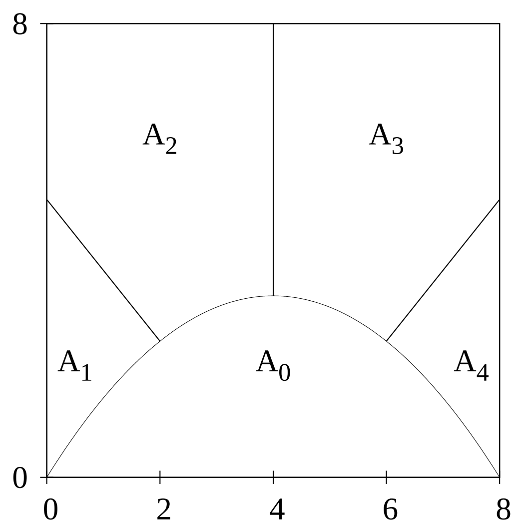


Abbildung 14.21: Die Skizze einer Figur. A_0, A_1 usw. sollen verschiedene Holzarten sein.

Nachfolgend sind die Dichte der Materialien wie man sie in Wikipedia findet angegeben:

Holzart	Dichte (kg / m^3)
Kiefer	520
Birke	650
Eiche	670

Berechnen Sie das Gewicht der Figur. Ermitteln Sie zuerst eine Schätzung.

14.6.9 Figur – Lösung

Wir werden im nachfolgenden zuerst die Fläche A_0 berechnen. Um die anderen Flächen zu berechnen benötigen wir eine Funktion für die Begrenzung zwischen A_1 und A_2. Dann können wir die Flächen mit Hilfe von Integralen berechnen. Im letzten Schritt wir dann mit der Dichte das Gewicht der einzelnen Abschnitte berechnet und damit das Gesamtgewicht der Figur.

Schätzung

Die Fläche der Figur soll $16\,\mathrm{m}^2$ ($4\,\mathrm{m} \cdot 4\,\mathrm{m}$) sein. Wir können von den gegebenen Holzsorten die Dichte mit $600\,\mathrm{kg} \;/\; \mathrm{m}^3$ abschätzen. Dann berechnet sich ein geschätztes Gewicht:

$$\begin{aligned} G &= V \cdot 600\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3} \\ &= 16\,\mathrm{m}^2 \cdot 0{,}04\,\mathrm{m} \cdot 600\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3} \\ &= 384\,\mathrm{kg} \end{aligned}$$

Die Figur ist schätzungsweise $400\,\mathrm{kg}$ schwer.

Die Fläche A_0

Die Fläche A_0:

$$\int_0^8 f(x)\,dx$$

Zwischen $x = 0$ und $x = 8$ ist der Graph der Funktion f positiv.

$$\begin{aligned} A_0 &= \int_0^8 f(x)\,dx \\ &= \int_0^8 -0{,}2 \cdot x \cdot (x-8)\,dx \\ &= \int_0^8 -0{,}2\,x^2 + 1{,}6\,x\,dx \\ &= \int_0^8 -\frac{1}{5}\,x^2 + 1{,}6\,x\,dx \\ &= -\frac{1}{15}\,x^3 + 0{,}8\,x^2 \Big|_0^8 \\ &= \frac{256}{15} \\ &\approx 17{,}07 \end{aligned}$$

Begrenzung zwischen A_1 und A_2

Die Begrenzung zwischen A_1 und A_2 nennen wir g. $g(x)$ steht senkrecht auf die Parabel und beide haben einen gemeinsamen Punkt bei $x = 2$.

Der gemeinsame Punkt ist dann $(2|f(2)) = (2|2{,}4)$.

Die Steigung der Parabel – von $f(x)$ – im Punkt $(2|2{,}4)$ wird benötigt um die Senkrechte zu $f(x)$ zu bestimmen:

$$\begin{aligned} f(x) &= -\frac{1}{5}\,x^2 + 1{,}6\,x \\ f'(x) &= -\frac{2}{5}\,x^2 + 1{,}6\,x \\ f'(2) &= 0{,}8 \\ &= \frac{4}{5} \end{aligned}$$

Die Steigung der senkrechten Gerade zu $f(x)$ im Punkt $(2|2{,}4)$ ist dann:

$$\begin{aligned} g(x) &= mx + b \\ m &= -\frac{1}{f'(2)} \\ &= -\frac{5}{4} \\ &= -1{,}25 \end{aligned}$$

Nun müssen wir nur noch b (den y-Achsenabschnitt) der Gerade g ausrechnen. Wir wissen, dass $f(x)$ und $g(x)$ bei $x = 2$ einen gemeinsamen Punkt haben:

$$\begin{aligned} g(2) &= f(2) \\ g(2) &= 2{,}4 \\ -1{,}25 \cdot 2 + b &= 2{,}4 \\ -2{,}5 + b &= 2{,}4 \\ b &= 2{,}4 + 2{,}5 \\ b &= 4{,}9 \end{aligned}$$

$$g(x) = -1{,}25\,x + 4{,}9$$

Die Fläche A_1

Die Fläche A_1 wird begrenzt durch zwei Kurven. Durch die Parabel $(p(x))$ und durch $g(x)$. Die Parabel $(p(x))$ ist immer unterhalb von $g(x)$.

$$\begin{aligned}
A_1 &= \int_0^2 g(x) - p(x)\, dx \\
&= \int_0^2 -1{,}25\, x + 4{,}9 - (-0{,}2 \cdot x \cdot (x-8))\, dx \\
&= \int_0^2 -1{,}25\, x + 4{,}9 - (-0{,}2\, x^2 + 1{,}6\, x)\, dx \\
&= \int_0^2 -1{,}25\, x + 4{,}9 + 0{,}2\, x^2 - 1{,}6\, x\, dx \\
&= \int_0^2 +0{,}2\, x^2 - 2{,}85\, x + 4{,}9\, dx \\
&= \frac{139}{30} \\
&= 4{,}6\overline{3} \\
&\approx 4{,}6
\end{aligned}$$

Die Fläche A_2

Die Fläche A_2 ist die Hälfte des gesamten Rechtecks minus der halben Fläche A_0 und minus der Fläche A_1:

$$\begin{aligned}
A_2 &= 4 \cdot 8 - \frac{1}{2} A_0 - A_1 \\
&= 32 - \frac{1}{2} \cdot \frac{256}{15} - \frac{139}{30} \\
&= \frac{113}{6} \\
&= 18{,}8\overline{3} \\
&\approx 19
\end{aligned}$$

Das Gewicht der Figur

Um das Gewicht zu berechnen, müssen wir nun das Volumen der einzelnen Abschnitte bestimmen und mit der Dichte multiplizieren. 8 Einheiten der Skizze entsprechen 4 m. Somit ist 1 Einheit 0,5 m lang.

1. A_0

$$\begin{aligned}\frac{256}{15}\,\mathrm{E}^2 &= \frac{256}{15}\,\mathrm{E}\cdot\mathrm{E}\\ &= \frac{256}{15}\cdot 0{,}5\,\mathrm{m}\cdot 0{,}5\,\mathrm{m}\\ &= \frac{64}{15}\,\mathrm{m}^2\end{aligned}$$

Da die Figur $4\,\mathrm{cm}$ $(=0{,}04\,\mathrm{m})$ dick sein soll gilt:

$$\begin{aligned}V_0 &= \frac{64}{15}\,\mathrm{m}^2\cdot 0{,}04\,\mathrm{m}\\ &= \frac{64}{375}\,\mathrm{m}^3\end{aligned}$$

Damit ergibt sich das Gewicht zu:

$$\begin{aligned}G_0 &= V_0\cdot 520\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}\\ &= \frac{64}{375}\,\mathrm{m}^3\cdot 520\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}\\ &= \frac{6656}{75}\,\mathrm{kg}\\ &\approx 89\,\mathrm{kg}\end{aligned}$$

2. A_1

$$\begin{aligned}\frac{139}{30}\,\mathrm{E}^2 &= \frac{139}{30}\,\mathrm{E}\cdot\mathrm{E}\\ &= \frac{139}{30}\cdot 0{,}5\,\mathrm{m}\cdot 0{,}5\,\mathrm{m}\\ &= \frac{139}{120}\,\mathrm{m}^2\end{aligned}$$

Da die Figur $4\,\mathrm{cm}$ $(=0{,}04\,\mathrm{m})$ dick sein soll gilt:

$$\begin{aligned}V_1 &= \frac{139}{120}\,\mathrm{m}^2\cdot 0{,}04\,\mathrm{m}\\ &= \frac{139}{3000}\,\mathrm{m}^3\end{aligned}$$

Damit ergibt sich das Gewicht zu:

$$\begin{aligned}G_1 &= V_1\cdot 650\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}\\ &= \frac{139}{3000}\,\mathrm{m}^3\cdot 650\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}\\ &= \frac{1807}{60}\,\mathrm{kg}\\ &\approx 30\,\mathrm{kg}\end{aligned}$$

3. A_2

$$\begin{aligned}\frac{113}{6}\,\mathrm{E}^2 &= \frac{113}{6}\cdot 0{,}5\,\mathrm{m}\cdot 0{,}5\,\mathrm{m}\\ &= \frac{113}{6}\cdot\frac{1}{2}\,\mathrm{m}\cdot\frac{1}{2}\,\mathrm{m}\\ &= \frac{113}{24}\,\mathrm{m}^2\end{aligned}$$

Da die Figur 4 cm (= 0,04 m) dick sein soll gilt:

$$\begin{aligned}V_2 &= \frac{113}{24}\,\mathrm{m}^2\cdot 0{,}04\,\mathrm{m}\\ &= \frac{113}{600}\,\mathrm{m}^3\end{aligned}$$

Damit ergibt sich das Gewicht zu:

$$\begin{aligned}G_2 &= V_2\cdot 670\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}\\ &= \frac{113}{600}\,\mathrm{m}^3\cdot 670\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}\\ &= \frac{7571}{60}\,\mathrm{kg}\\ &\approx 126\,\mathrm{kg}\end{aligned}$$

4. A_3
   Ist so schwer wie A_2: 114 kg

5. A_4
   Ist so schwer wie A_1: 30 kg

Das Gesamtgewicht beträgt dann ca.:

$$\begin{aligned}G &= G_0 + G_1 + G_2 + G_3 + G_4\\ &\approx 89\,\mathrm{kg} + 30\,\mathrm{kg} + 126\,\mathrm{kg} + 126\,\mathrm{kg} + 30\,\mathrm{kg}\\ &\approx 401\,\mathrm{kg}\end{aligned}$$

14.6.10 Kegel

Sie können einen Kegel herstellen, indem Sie eine lineare Funktion um die x-Achse rotieren lassen.

1. Bestimmen Sie das Volumens des Kegels, der entsteht, wenn Sie die Funktion $f(x) = 2x$ um die x-Achse rotieren lassen. Dabei liegt die Kegelspitze im Ursprung. Der entstehende Kegel soll 3 LE hoch sein.

2. Bestimmen Sie das Volumens des Kegels mit der Höhe von 4 cm und einem Radius der Bodenfläche von 8 cm.

3. Leiten Sie die Formel für das Volumen eines Kegels her:

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

14.6.11 Kegel – Lösung

Sie können einen Kegel herstellen, indem Sie eine lineare Funktion um die x-Achse rotieren lassen.

1. Bestimmen Sie das Volumens des Kegels, der entsteht, wenn Sie die Funktion $f(x) = 2x$ um die x-Achse rotieren lassen. Dabei liegt die Kegelspitze im Ursprung. Der entstehende Kegel soll 3 LE hoch sein.

   Das Volumen bestimmt sich:

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^3 [f(x)]^2 \, dx \\ &= \pi \int_0^3 [2x]^2 \, dx \\ &= \pi \int_0^3 4x^2 \, dx \\ &= \pi \left[\frac{4}{3} x^3 \right] \Big|_0^3 \\ &= \frac{4\pi}{3} 3^3 \\ &= 4\pi \, 3^2 \\ &= 36\pi \end{aligned}$$

   Das Volumen beträgt $36\,\mathrm{LE}^3$

2. Bestimmen Sie das Volumens des Kegels mit der Höhe von 4 cm und einem Radius der Bodenfläche von 8 cm.

   Zu der Aufgabe vorher muss nun erst die lineare Funktion erstellt werden. Der Kegel wird auf die Seite gelegt, so dass er um die x-Achse rotiert. Da es sich um eine Ursprungsgerade handelt, gilt $b = 0$. Die Steigung ist: $m = \frac{8cm}{4cm}$

$$f(x) = 2x$$

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^3 [f(x)]^2 \, dx \\ &= \pi \int_0^3 [2x]^2 \, dx \\ &= \pi \int_0^3 4x^2 \, dx \\ &= \pi \left[\frac{4}{3} \, x^3 \right] \Bigg|_0^3 \\ &= \frac{4\pi}{3} \, 3^3 \\ &= 4\pi \, 3^2 \\ &= 36\pi \end{aligned}$$

Das Volumen beträgt $36 \, \mathrm{LE}^3$

3. Leiten Sie die Formel für das Volumen eines Kegels her:

$$V = \frac{1}{3} \, \pi r^2 h$$

Zu der Aufgabe vorher muss nun erst die lineare Funktion erstellt werden. Der Kegel wird auf die Seite gelegt, so dass er um die x-Achse rotiert. Da es sich um eine Ursprungsgerade handelt (die Spitze des Kegels liegt im Ursprung), gilt $b = 0$. Die Steigung ist: $m = \frac{r}{h}$

$$f(x) = \frac{r}{h} \, x$$

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^h [f(x)]^2 \, dx \\ &= \pi \int_0^h [\frac{r}{h} \, x]^2 \, dx \\ &= \pi \int_0^h \frac{r^2}{h^2} \, x^2 \, dx \\ &= \pi \left[\frac{r^2}{h^2} \, \frac{1}{3} \, x^3 \right] \Bigg|_0^h \\ &= \frac{r^2 \, \pi}{3 \, h^2} \, h^3 \\ &= \frac{1}{3} \, \pi \, r^2 \, h \end{aligned}$$

14.6.12 Torus

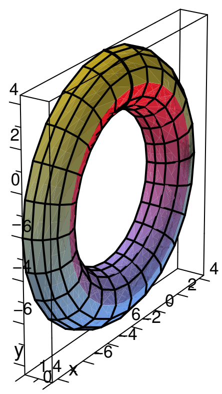


Abbildung 14.22: Ein Torus.

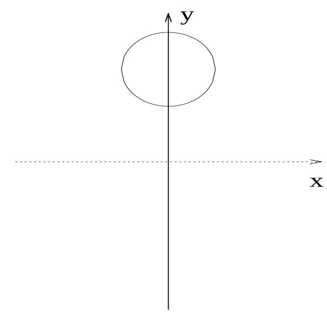


Abbildung 14.23: Ein Torus ist hier ein um die x-Achse rotierender Kreis.

Ein Torus ist ein Kreis, der um die x-Achse kreist.

1. Gesucht ist das Volumen eines Torus. Der Mittelpunkt des Torus soll 5 cm vom Ursprung entfernt sein. Der Kreis soll einen Durchmesser von 2 cm haben.

   Für die Fläche eines Kreises gilt: $A = \pi r^2$. somit gilt für einen Halbkreis:

   $$\int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2}\, dx = \frac{1}{2}\pi r^2$$

   oder für einen Viertelkreis:

   $$\int_{0}^{r} \sqrt{r^2 - x^2}\, dx = \frac{1}{4}\pi r^2$$

2. Bestimmen Sie das Volumen für einen allgmeinen Torus. Der Abstand des Mittelpunktes des rotierenden Kreises zum Ursprung sei R. Der Kreis selber habe den Abstand r.

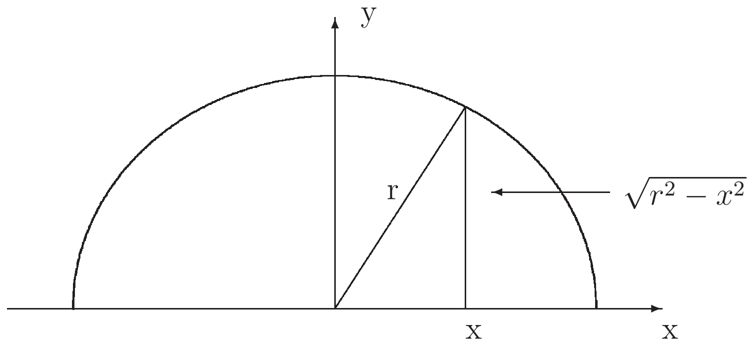


Abbildung 14.24: Die Fläche eines Halbkreises kann als die Fläche unter dem Graphen von f betrachtet werden mit $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$.

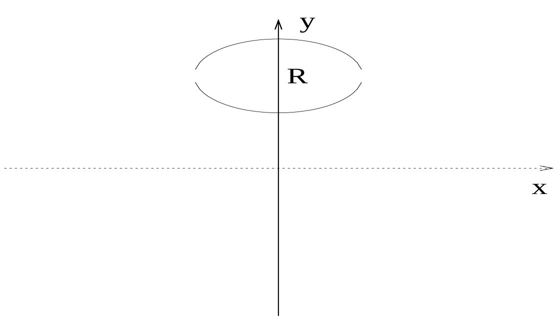


Abbildung 14.25: Ein Torus. Der rotierende Kreis hat den Radius r und der Mittelpunkt des Kreises ist R vom Ursprung entfernt.

14.6.13 Torus – Lösung

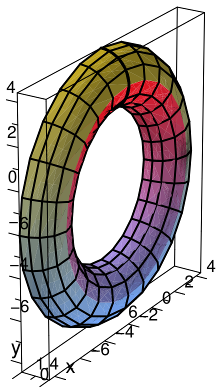


Abbildung 14.26: Ein Torus.

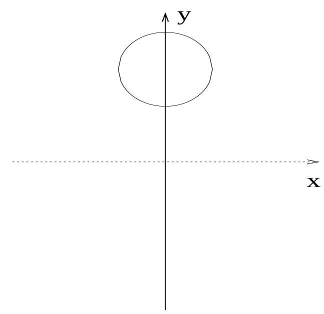


Abbildung 14.27: Ein Torus ist hier ein um die x-Achse rotierender Kreis.

Ein Torus ist ein Kreis, der um die x-Achse kreist.

1. Gesucht ist das Volumen eines Torus. Der Mittelpunkt des Torus soll 5 cm vom Ursprung entfernt sein. Der Kreis soll einen Durchmesser von 2 cm haben.

   Für die Fläche eines Kreises gilt: $A = \pi r^2$. somit gilt für einen Halbkreis:

   $$\int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2}\, dx = \frac{1}{2}\pi r^2$$

   oder für einen Viertelkreis:

   $$\int_{0}^{r} \sqrt{r^2 - x^2}\, dx = \frac{1}{4}\pi r^2$$

   Das Volumen des Torus kann beschrieben werden durch zwei Funktionen, die den Kreis einschreiben.

   $$f(x) = 5 + \sqrt{2^2 - x^2}$$

   und

   $$g(x) = 5 - \sqrt{2^2 - x^2}$$

   Dies sind jeweils Halbkreise um den Ursprung und dann 5 nach oben verschoben.

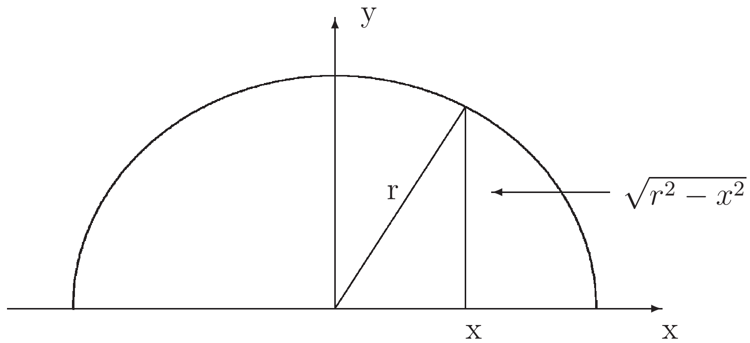


Abbildung 14.28: Die Fläche eines Halbkreises kann als die Fläche unter dem Graphen von f betrachtet werden mit $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$.

Dabei ist $f(x)$ der äussere Graph und g(x) der innere. Wir lassen beide Rotieren und berechnen die jeweiligen Rotationsvolumina. Dann müssen wir die entstandenen Volumina voneinander abziehen. (Das haben wir im zweidimensionalen mit den Flächen auch immer so gemacht.)

$$V = \pi \int_{-2}^{2} [f(x)]^2 \, dx - \pi \int_{-2}^{2} [g(x)]^2 \, dx$$

Wir berechnen jetzt die Integrale einzeln:

(a) Die Funktion $f(x)$ ist achsensymmetrisch, also reicht es nur einen Viertelkreis zu untersuchen:

$$V_1 = \pi \int_{-2}^{2} [f(x)]^2 \, dx = 2\pi \int_{0}^{2} [f(x)]^2 \, dx$$

$$V_1 = 2\pi \int_{0}^{2} (5 + \sqrt{2^2 - x^2})^2 \, dx = 2\pi \int_{0}^{2} 25 + 2 \cdot 5 \cdot \sqrt{2^2 - x^2} + 4 - x^2 \, dx$$

$$V_1 = 2\pi \int_{0}^{2} 29 - x^2 + 10\sqrt{2^2 - x^2} \, dx$$

$$V_1 = 2\pi \int_{0}^{2} 29 - x^2 \, dx + 2\pi \int_{0}^{2} 10\sqrt{2^2 - x^2} \, dx$$

$$V_1 = 2\pi \int_0^2 29 - x^2 \, dx + 20\pi \int_0^2 \sqrt{2^2 - x^2} \, dx$$

Wenn man den Wurzelterm integriert, so ergibt dies gerade einen Viertelkreis:

$$\int_0^2 \sqrt{2^2 - x^2} \, dx = \frac{1}{4}\pi 2^2 = \pi$$

Damit wird das Integral von oben zu:

$$V_1 = 2\pi \int_0^2 29 - x^2 \, dx + 20\pi^2$$

(b)

$$V_2 = \pi \int_{-2}^2 [g(x)]^2 \, dx = \pi \int_{-2}^2 (5 - \sqrt{2^2 - x^2})^2 \, dx = 2\pi \int_0^2 (5 - \sqrt{2^2 - x^2})^2 \, dx$$

$$V_2 = \pi \int_0^2 25 + 4 - x^2 - 2 \cdot 5 \cdot \sqrt{2^2 - x^2} \, dx$$

$$V_2 = \pi \int_0^2 29 - x^2 - 10\sqrt{2^2 - x^2} \, dx$$

$$V_2 = 2\pi \int_0^2 29 - x^2 \, dx - 2\pi \int_0^2 10\sqrt{2^2 - x^2} \, dx$$

$$V_2 = 2\pi \int_0^2 29 - x^2 \, dx - 20\pi \int_0^2 \sqrt{2^2 - x^2} \, dx$$

Wenn man den Wurzelterm integriert, so ergibt dies gerade einen (unteren) Viertelkreis:

$$\int_0^2 \sqrt{2^2 - x^2} \, dx = \frac{1}{4}\pi 2^2 = \pi$$

Damit wird das Integral von oben zu:

$$V_2 = 2\pi \int_0^2 29 - x^2 \, dx - 20\pi^2$$

(c)

$$V = V_1 - V_2 = \pi \int_{-2}^2 29 - x^2 \, dx + 10\pi - \left(\pi \int_{-2}^2 29 - x^2 \, dx - 10\pi\right) = 40\pi^2$$

2. Bestimmen Sie das Volumen für einen allgmeinen Torus. Der Abstand des Mittelpunktes des rotierenden Kreises zum Ursprung sei R. Der Kreis selber habe den Abstand r.

   Nun im Prinzip müssen Sie für in der obigen Rechnung für den Radius $r = 2$ jetzt nur r schreiben und für die 5 R einsetzen.

   Das Volumen des Torus kann beschrieben werden durch zwei Funktionen, die den Kreis einschreiben.

$$f(x) = R + \sqrt{r^2 - x^2}$$

   und

$$g(x) = R - \sqrt{r^2 - x^2}$$

   Dies sind jeweils Halbkreise mit dem Radius r um den Ursprung und dann um R nach oben verschoben.

   Dabei ist $f(x)$ der äussere Graph und g(x) der innere. Wir lassen beide Rotieren und berechnen die jeweiligen Rotationsvolumina. Dann müssen wir die entstandenen Volumina voneinander abziehen. (Das haben wir im zweidimensionalen mit den Flächen auch immer so gemacht.)

$$V = \pi \int_{-r}^{r} [f(x)]^2 \, dx - \pi \int_{-r}^{r} [g(x)]^2 \, dx$$

   Wir berechnen jetzt die Integrale einzeln:

   (a) Die Funktion $f(x)$ ist achsensymmetrisch, also reicht es nur einen Viertelkreis zu untersuchen:

$$V_1 = \pi \int_{-r}^{r} [f(x)]^2 \, dx = 2\pi \int_{0}^{r} [f(x)]^2 \, dx$$

$$V_1 = 2\pi \int_{0}^{r} (R + \sqrt{r^2 - x^2})^2 \, dx$$

$$V_1 = 2\pi \int_{0}^{r} R^2 + 2 \cdot R \cdot \sqrt{r^2 - x^2} + r^2 - x^2 \, dx$$

$$V_1 = 2\pi \int_{0}^{r} R^2 + r^2 - x^2 + 2R\sqrt{r^2 - x^2} \, dx$$

$$V_1 = 2\pi \int_{0}^{r} R^2 + r^2 - x^2 \, dx + 2\pi \int_{0}^{r} 2R\sqrt{r^2 - x^2} \, dx$$

$$V_1 = 2\pi \int_{0}^{r} R^2 + r^2 - x^2 \, dx + 4R\pi \int_{0}^{r} \sqrt{r^2 - x^2} \, dx$$

Wenn man den Wurzelterm integriert, so ergibt dies gerade einen Viertelkreis:

$$\int_0^r \sqrt{r^2 - x^2}\, dx = \pi r^2$$

Damit wird das Integral von oben zu:

$$V_1 = 2\pi \int_0^r R^2 + r^2 - x^2\, dx + \frac{1}{2}\pi^2 r^2$$

(b)

$$V_2 = \pi \int_{-r}^r [g(x)]^2\, dx = 2\pi \int_0^r [g(x)]^2\, dx$$

$$V_2 = 2\pi \int_0^r (R - \sqrt{r^2 - x^2})^2\, dx$$

$$V_2 = 2\pi \int_0^r R^2 + r^2 - x^2 - 2 \cdot R \cdot \sqrt{r^2 - x^2}\, dx$$

$$V_2 = 2\pi \int_0^r R^2 + r^2 - x^2\, dx - 2\pi \int_0^r 2R\sqrt{r^2 - x^2}\, dx$$

$$V_2 = 2\pi \int_0^r R^2 + r^2 - x^2\, dx - 4R\pi \int_0^r \sqrt{r^2 - x^2}\, dx$$

Wenn man den Wurzelterm integriert, so ergibt dies gerade einen (unteren) Viertelkreis:

$$\int_0^2 \sqrt{r^2 - x^2}\, dx = \frac{1}{4}\pi r^2$$

Damit wird das Integral von oben zu:

$$V_2 = 2\pi \int_0^2 29 - x^2\, dx - \pi^2 r^2$$

(c)

$$V = V_1 - V_2$$

$$V = \pi \int_{-2}^r R^2 + r^2 - x^2\, dx + R\pi r^2 - \left(\pi \int_{-2}^r R^2 + r^2 - x^2\, dx - R\pi r^2\right)$$

Die Integrale heben sich gerade weg und übrig bleibt:

$$V = 2\pi^2 \cdot R \cdot r^2$$

Kapitel 15

Steckbriefaufgaben

Bei Steckbriefaufgaben sind Eigenschaften von Funktionen bekannt und daraus soll auf die Funktion geschlossen werden.

Beispiel:
Eine Funktion dritten Grades enthält den Punkt (0|0). Sie hat einen Hochpunkt bei (2|3) und eine Wendestelle bei $x = 4$.
Geben Sie die Funktion an.

Lösung: Eine Funktion dritten Grades sieht folgendermaßen aus:

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d, \qquad a, b, c, d \in \mathbb{R}$$

Gesucht sind also die Werte von vier Unbekannten: a, b, c und d.

Dazu benötigt man vier Gleichungen. Genau so viele Gleichungen, wie man Unbekannte hat.

1. „Die Funktion enhält den Punkt (0|0).“
   Daraus folgt die Gleichung:

$$\begin{aligned} f(0) &= 0 \\ a \cdot 0^3 + b \cdot 0^2 + c \cdot 0 + d &= 0 \end{aligned}$$

   Eine Unbekannte lässt sich sofort bestimmen:

$$d = 0$$

2. „Sie hat einen Hochpunkt bei (2|3)“.
   Daraus kann man zwei Gleichungen gewinnen:
   Die Funktion enhält den Punkt (2|3).

$$\begin{aligned} f(2) &= 3 \\ a \cdot 2^3 + b \cdot 2^2 + c \cdot 2 + d &= 3 \\ a \cdot 8 + b \cdot 4 + c \cdot 2 + d &= 3 \\ 8a + 4b + 2c + d &= 3 \end{aligned}$$

3. „Sie hat einen Hochpunkt bei (2|3)“.
   Die Funktion hat bei $x = 2$ eine Extremstelle.
   Die notwendige Bedingung für eine Extremstelle ist:

$$\begin{aligned}
f'(2) &= 0 \\
f'(x) &= 3ax^2 + 2bx + c \\
f'(2) &= 3a \cdot 2^2 + 2b \cdot 2 + c = 0 \\
f'(2) &= 12a + 4b + c = 0
\end{aligned}$$

4. „(Die Funktion hat) eine Wendestelle bei $x = 4$.“ Die notwendige Bedingung für eine Wendestelle bei $x = 4$ ist:

$$\begin{aligned}
f''(4) &= 0 \\
f''(x) &= 6ax + 2b \\
f''(4) &= 6a \cdot 4 + 2b = 0 \\
f''(4) &= 24a + 2b = 0
\end{aligned}$$

Die Gleichungen ergeben sich also wie folgt ($d = 0$):

$$\begin{array}{rcrcrcr}
8a & + & 4b & + & 2c & = & 3 \\
12a & + & 4b & + & c & = & 0 \\
24a & + & 2b & & & = & 0
\end{array}$$

Die Lösung dieses Gleichungssystems ergibt:

$$\begin{aligned}
a &= 3/32 \\
b &= -9/8 \\
c &= 27/8
\end{aligned}$$

Die Funktion lautet also:

$$f(x) = \frac{3}{32}x^3 - \frac{9}{8}x^2 + \frac{27}{8}x$$

Zum Schluss muß man noch überprüfen, ob wirklich ein Hochpunkt bei (2|3) und eine Wendestelle vorliegt:

1. Ist es wirklich ein Hochpunkt bei $x = 2$?

$$f''(2) = 6 \cdot 3/32 \cdot 2 + 2 \cdot (-9/8) = \frac{-9}{8} < 0$$

2. Ist es wirklich eine Wendestelle bei $x = 4$?

$$f'''(4) = 6 \cdot 3/32 \neq 0$$

Alle Bedingungen sind also erfüllt.

15.1 Umsetzen der Texte

Dieser Abschnitt beschäftigt sich damit, wie Texte in Gleichungen umgesetzt werden können.

- Einsetzen in die Originalfunktion: Alle Punkte
- Einsetzen in die 1. Ableitung:
  - Steigung
    Wenn die Steigung in % angegeben ist, muss man noch umrechnen (% = 1/100), (‰= 1/1000):
    Beispiel: Die Steigung an der Stelle $x = 2$ sei 10 %, dann gilt:
    $$f(2) = 0{,}1$$
  - Extremstelle. x-Wert des Tiefpunktes, Hochpunktes.
    Ein Tiefpunkt sei bei $x = 2$:
    $$f'(2) = 0$$
- Einsetzen in die 2. Ableitung:
  - Wendestelle. x-Wert des Wendepunktes, der größten Steigung, der kleinsten Steigung.
    Eine Wendestelle sei bei $x = 2$:
    $$f''(2) = 0$$
  - Krümmung
    Wenn die Krümmung an einer Stelle null ist, dann ist auch die 2. Ableitung an der Stelle null.
- Berührpunkt an der x-Achse bei $x = 2$.
  $$f(x) = (x-2)^2 \cdot ...$$
- Sattelpunkt.
  1. und 2. Ableitung sind null: Sattelpunkt bei $x = 2$
  $$f'(2) = 0$$
  $$f''(2) = 0$$

Generell gilt, dass Sie so viele Gleichungen benötigen, wie Sie Variablen haben!
Eine Funktion **dritten** Gerades hat **vier** Unbekannte und benötigt darum vier Gleichungen:

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

15.2 Beispiele für Textbausteine und deren Gleichungen

- Der Graph von f geht durch den Punkt (3|4)

$$f(3) = 4$$

- Der Extrempunkt von $f(x)$ ist bei (3|4)

$$\begin{aligned} f(3) &= 4 && \text{Der Punkt} \\ f'(3) &= 0 && \text{Die Extremstelle} \end{aligned}$$

- Der Wendepunkt von $f(x)$ ist bei (3|4)

$$\begin{aligned} f(3) &= 4 && \text{Der Punkt} \\ f''(3) &= 0 && \text{Die Wendestelle} \end{aligned}$$

- Der Graph von f hat bei (3|4) eine Tangente mit 45° Steigung
  Dies bedeutet, dass die Tangente $T(x)$ die Steigung 1 hat:

$$\begin{aligned} T(x) &= x + b \\ T'(x) &= 1 \end{aligned}$$

  Für den Graphen $f(x)$ bedeutet dies:

$$\begin{aligned} f(3) &= 4 && \text{Der Punkt} \\ f'(3) &= 1 && \text{Die Steigung ist 1} \end{aligned}$$

- Der Graph von f hat bei $x = 3$ eine Extremstelle
  Hier haben Sie keinen Punkt gegeben, also bleibt nur die Angabe der Extremstelle, wo die Tangente null wird.

$$f'(3) = 0 \qquad \text{Die Extremstelle}$$

- Der Graph von f hat bei $x = 3$ einen Berührpunkt mit der x-Achse
  Bei $x = 3$ hat $f(x)$ eine Extremstelle und eine Nullstelle, weil die x-Achse ja berührt wird.

$$\begin{aligned} f(3) &= 0 && \text{Der Nullpunkt} \\ f'(3) &= 0 && \text{Die Extremstelle} \end{aligned}$$

- Die Fläche unter dem Graphen von f wird maximal bei $x = 3$
  Dazu gibt es zwei Erklärungen:

1. Die Fläche unter dem Graphen nimmt nach $x = 3$ ab, d. h. aber, dass dann ab $x = 3$ $f(x)$ unterhalb der x-Achse verläuft. (Zur Erinnerung: Die Fläche unterhalb der x-Achse ist negativ.) Es kommt also immer etwas negatives ab $x = 3$ dazu.
2. Das Maximum von $F(x)$ soll bei $x = 3$ sein:

$$F'(3) = 0$$

Der Vorzeichenwechsel findet in jedem Fall von „+“ nach „-“ statt. Dies taucht in den Gleichungen nicht auf. Evtl. müssen Sie nach dem Aufstellen der Funktion aber überprüfen, ob es ein Maximum ist.

Die endgültige Gleichung ist mit $F'(x) = f(x)$:

$$f(3) = 0$$

- Die größte Steigung von $f(x)$ ist gesucht:
  Hier wird das Maximum von $f'(x)$ gesucht:

$$f''(x) = 0$$

- $f(x)$ ist achsensymmetrisch:
  Nur die geraden Exponenten können vorkommen:

$$f(x) = ax^4 + bx^2 + c$$

(Ein Zusatz, dass $f(x)$ am Ursprung eine Extremstelle hat, ist leider gemein, denn das steckt schon in der Bedingung, dass $f(x)$ punktsymmetrisch ist und gibt folgerichtig dann auch keine neue Gleichung.)

- $f(x)$ ist punktsymmetrisch:
  Nur die ungeraden Exponenten können vorkommen:

$$f(x) = ax^5 + bx^3 + cx$$

(Ein Zusatz, dass $f(x)$ durch den Ursprung geht, ist leider gemein, denn das steckt ja schon in der Bedingung, dass $f(x)$ punktsymmetrisch ist und gibt folgerichtig dann auch keine neue Gleichung.)

- $f(x)$ hat am Punkt $(3|4)$ einen Sattelpunkt.
  Am Sattelpunkt hat $f(x)$ eine waagerechte Tangente.

$$\begin{aligned} f(3) &= 4 && \text{Der Punkt} \\ f'(3) &= 0 && \text{Die Tangente ist waagerecht} \\ f''(3) &= 0 && \text{Die Wendestelle} \end{aligned}$$

- Ein Auto, welches mit der Entfernung 10 Meter vom Beobachter startet, mit der Geschwindigkeit $v(t)$ hat nach 2 Sekunden die Entfernung von 3.

  Sie können entweder Ausnutzen, dass die Entfernung die Stammfunktion von $v(t)$ ist. Dabei kennen Sie die Integrationskonstante, da die Anfangsentfernung $s(0) = 10$ gegeben ist.

$$\begin{aligned} s(t) &= V(t) \\ s(0) &= 10 \\ s(2) &= 3 \end{aligned}$$

  $s(0) = 10$ ist keine weitere Gleichung, weil Sie ja als neue Unbekannte die Integrationskonstante dazu bekommen:

  Ein Beispiel zur Erinnerung mit einer gegebenen Funktion $v(t)$ (so wie bisher):

$$\begin{aligned} v(t) &= 6t^2 + 4t + 5 \\ V(t) = s(t) &= 2t^3 + 2t + 5t + c \\ s(0) &= c = 10 \\ s(t) &= 2t^3 + 2t + 5t + 10 \end{aligned}$$

  Ein Beispiel mit einer gesuchten Funktion $v(t)$:

$$\begin{aligned} v(t) &= at^2 + bt + c \\ V(t) = s(t) &= \frac{1}{3}at^3 + \frac{1}{2}bt^2 + ct + s(0) \\ V(t) = s(t) &= \frac{1}{3}at^3 + \frac{1}{2}bt^2 + ct + 10 \end{aligned}$$

  Dies ergibt dann die Gleichung:

$$\begin{aligned} V(2) &= 3 \\ \frac{1}{3}a \cdot 2^3 + \frac{1}{2}b \cdot 2^2 + c \cdot 2 + 10 &= 3 \\ \frac{1}{3}a \cdot 2^3 + \frac{1}{2}b \cdot 2^2 + c \cdot 2 &= -7 \end{aligned}$$

  Sie können aber auch argumentieren, dass die zurückgelegte Entfernung -7 m beträgt:

$$\begin{aligned} \int_0^2 v(t)\,dt &= -7 \\ V(2) - V(0) &= -7 \end{aligned}$$

  In beiden Fällen stellen Sie dieselbe Gleichung auf.

15.3 Aufgaben

Aufgabe 15.1
Eine Funktion dritten Grades enthält den Punkt $(0|0)$. Sie hat einen Hochpunkt bei $(4|3)$ und eine Wendestelle bei $x = 2$.
Geben Sie die Funktionsgleichung an.
(Lösung siehe Seite 224).

Aufgabe 15.2
Eine Funktion dritten Grades hat einen Hochpunkt bei $(0|2)$ und einen Tiefpunkt bei bei $(2|0)$.
Geben Sie die Funktionsgleichung an.
(Lösung siehe Seite 225).

Aufgabe 15.3
Eine Funktion dritten Grades geht durch den Punkt bei $(0|10)$ und die Wendetangente hat am Wendepunkt $(6|5)$ die Steigung -3.
Geben Sie die Funktionsgleichung an.
(Lösung siehe Seite 227).

Aufgabe 15.4
Eine Funktion dritten Grades hat einen Sattelpunkt bei $(-1|4)$ und schneidet die y-Achse bei 10.
Geben Sie die Funktionsgleichung an.
(Lösung siehe Seite 228).

Aufgabe 15.5
Eine Funktion dritten Grades ist punktsymmetrisch und hat ein Maximum bei $(2|-32)$.
Geben Sie die Funktionsgleichung an.
(Lösung siehe Seite 229).

Aufgabe 15.6
Eine Funktion vierten Grades ist achsensymmetrisch und hat bei $(0|5)$ einen Hochpunkt. Ferner hat die Funktion ein Minimum bei $x = \pm 2$ und sie geht durch den Punkt $(1|-16)$.
Geben Sie die Funktionsgleichung an.
(Lösung siehe Seite 230).

15.4 Lösungen

Zu Aufgabe: 15.1
Eine Funktion dritten Grades sieht folgendermaßen aus:

$$\begin{aligned} f(x) &= ax^3 + bx^2 + cx + d \\ &a, b, c, d \in \mathbb{R} \\ f'(x) &= 3ax^2 + 2bx + c \\ f''(x) &= 6ax + 2b \\ f'''(x) &= 6a \end{aligned}$$

1. „Die Funktion enhält den Punkt (0|0).“

$$\begin{aligned} f(0) &= 0 \\ a \cdot 0^3 + b \cdot 0^2 + c \cdot 0 + d &= 0 \\ d &= 0 \end{aligned}$$

2. „Sie hat einen Hoch**punkt** bei (4|3)“.

$$\begin{aligned} f(4) &= 3 \\ a \cdot 4^3 + b \cdot 4^2 + c \cdot 4 + d &= 3 \\ 64a + 16b + 4c + d &= 3 \end{aligned}$$

3. „Sie hat einen Hochpunkt = **Extremstelle** bei 4“.

$$\begin{aligned} f'(4) &= 0 \\ 3a \cdot 4^2 + 2b \cdot 4 + c &= 0 \\ 48a + 8b + c &= 0 \end{aligned}$$

4. „Die Funktion hat eine Wendestelle bei $x = 2$.“

$$\begin{aligned} f''(2) &= 0 \\ 6a \cdot 2 + 2b &= 0 \\ 12a + 2b &= 0 \end{aligned}$$

Die Gleichungen ergeben sich also wie folgt ($d = 0$):

$$\begin{array}{rcrcrcl} 64a & + & 16b & + & 4c & = & 3 \\ 48a & + & 8b & + & c & = & 0 \\ 12a & + & 2b & & & = & 0 \end{array}$$

Die Lösung dieses Gleichungssystems ergibt:

$$a = \frac{-3}{32}, b = \frac{9}{16}, c = 0$$

Die Funktionsgleichung lautet also:

$$f(x) = \frac{-3}{32}x^3 + \frac{9}{16}x^2$$

Zum Schluss muss man noch überprüfen, ob wirklich ein Hochpunkt bei (4|3) und eine Wendestelle bei $x = 2$ vorliegt:

1. Ist wirklich ein Hochpunkt bei $x = 4$?

$$f''(4) = 6 \cdot \frac{-3}{32} \cdot 4 + 2 \cdot \frac{9}{16}$$
$$f''(4) = \frac{-9}{8} < 0$$

   Dies bedeutet, dass (4|3) ein Hochpunkt ist.

2. Ist wirklich eine Wendestelle bei $x = 2$?

$$f'''(2) = 6 \cdot \frac{-3}{32} \neq 0$$

Alle Bedingungen sind also erfüllt für die Funktion:

$$f(x) = -\frac{3}{32}x^3 + \frac{9}{16}x^2$$

Zu Aufgabe: 15.2
Eine Funktion dritten Grades sieht folgendermaßen aus:

$$\begin{aligned} f(x) &= ax^3 + bx^2 + cx + d \\ &a, b, c, d \in \mathbb{R} \\ f'(x) &= 3ax^2 + 2bx + c \\ f''(x) &= 6ax + 2b \\ f'''(x) &= 6a \end{aligned}$$

1. „Die Funktion enhält den Punkt (0|2).“

$$\begin{aligned} f(0) &= 2 \\ a \cdot 0^3 + b \cdot 0^2 + c \cdot 0 + d &= 2 \\ d &= 2 \end{aligned}$$

2. „Sie hat einen Hochpunkt = **Extremstelle** bei 0“.

$$\begin{aligned} f'(0) &= 0 \\ 3a \cdot 0^2 + 2b \cdot 0 + c &= 0 \\ c &= 0 \end{aligned}$$

3. „Die Funktion enhält den Punkt (2|0)."

$$\begin{aligned} f(2) &= 0 \\ a \cdot 2^3 + b \cdot 2^2 + c \cdot 2 + d &= 0 \\ 8a + 4b + 2c + d &= 0 \end{aligned}$$

4. „Sie hat einen Tiefpunkt (= **Extremstelle**) bei 2".

$$\begin{aligned} f'(2) &= 0 \\ 3a \cdot 2^2 + 2b \cdot 2 + c &= 0 \\ 12a + 4b + c &= 0 \end{aligned}$$

Die Gleichungen ergeben sich also wie folgt ($d = 2$ und $c = 0$):

$$\begin{array}{rcrcr} 8a & + & 4b & = & -2 \\ 12a & + & 4b & = & 0 \end{array}$$

Die Lösung dieses Gleichungssystems ergibt:

$$a = \frac{1}{2}, b = \frac{-3}{2}$$

Die Funktionsgleichung lautet also:

$$f(x) = \frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 2$$

Zum Schluss muss man noch überprüfen, ob wirklich ein Hochpunkt bei (0|2) und ein Tiefpunkt bei (2|0) vorliegt:

1. Ist wirklich ein Hochpunkt bei $x = 0$?

$$\begin{aligned} f''(0) &= 6 \cdot \frac{1}{2} \cdot 0 + 2 \cdot (-3/2) \\ f''(0) &= -3 < 0 \end{aligned}$$

Dies bedeutet, dass (0|2) ein Hochpunkt ist.

2. Ist wirklich ein Tiefpunkt bei $x = 2$?

$$\begin{aligned} f''(2) &= 6 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 + 2 \cdot (-3/2) \\ f''(2) &= 3 > 0 \end{aligned}$$

Alle Bedingungen sind also erfüllt für die Funktion:

$$f(x) = \frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 2$$

Zu Aufgabe: 15.3
Eine Funktion dritten Grades sieht folgendermaßen aus:

$$\begin{aligned} f(x) &= ax^3 + bx^2 + cx + d \\ a, b, c, d &\in \mathbb{R} \\ f'(x) &= 3ax^2 + 2bx + c \\ f''(x) &= 6ax + 2b \\ f'''(x) &= 6a \end{aligned}$$

1. „Die Funktion enhält den Punkt (0|10).“

$$\begin{aligned} f(0) &= 10 \\ a \cdot 0^3 + b \cdot 0^2 + c \cdot 0 + d &= 10 \\ d &= 10 \end{aligned}$$

2. „Sie hat einen Wende**punkt** bei (6|5)“.

$$\begin{aligned} f(6) &= 5 \\ a \cdot 6^3 + b \cdot 6^2 + c \cdot 6 + d &= 5 \\ 216a + 36b + 6c + 10 &= 5 \\ 216a + 36b + 6c &= -5 \end{aligned}$$

3. „Die Funktion hat eine Wendestelle bei $x = 6$.“

$$\begin{aligned} f''(6) &= 0 \\ 6a \cdot 6 + 2b &= \qquad 0 \\ 36a + 2b &= 0 \end{aligned}$$

4. Die Steigung an der Stelle $x = 6$ beträgt -3.

$$\begin{aligned} f'(6) &= -3 \\ 3a \cdot 6^2 + 2b \cdot 6 + c &= -3 \\ 108a + 12b + c &= -3 \end{aligned}$$

Die Gleichungen ergeben sich also wie folgt ($d = 10$):

$$\begin{array}{rcrcrcr} 216a & + & 36b & + & 6c = & -5 \\ 36a & + & 2b & & = & 0 \\ 108a & + & 12b & + & c = & -3 \end{array}$$

Die Lösung dieses Gleichungssystems ergibt:

$$a = \frac{13}{216}, b = \frac{-13}{12}, c = \frac{7}{2}$$

Die Funktionsgleichung lautet also:

$$f(x) = \frac{13}{216}x^3 - \frac{13}{12}x^2 + \frac{7}{2}x + 10$$

Zum Schluss muss man noch überprüfen, ob wirklich eine Wendestelle bei $x = 6$ vorliegt:

$$f'''(6) = 6 \cdot \frac{13}{216} \neq 0$$

Alle Bedingungen sind also erfüllt für die Funktion:

$$f(x) = \frac{13}{216}x^3 - \frac{13}{12}x^2 + \frac{7}{2}x + 10$$

Zu Aufgabe: 15.4
Eine Funktion dritten Grades sieht folgendermaßen aus:

$$\begin{aligned} f(x) &= ax^3 + bx^2 + cx + d \\ a, b, c, d &\in \mathbb{R} \\ f'(x) &= 3ax^2 + 2bx + c \\ f''(x) &= 6ax + 2b \\ f'''(x) &= 6a \end{aligned}$$

1. „Die Funktion schneidet die y-Achse bei 10. Sie geht also durch den Punkt (0|10).“

$$\begin{aligned} f(0) &= 10 \\ a \cdot 0^3 + b \cdot 0^2 + c \cdot 0 + d &= 10 \\ d &= 10 \end{aligned}$$

2. „Sie hat einen Sattel**punkt** bei $(-1|4)$“.

$$\begin{aligned} f(-1) &= 4 \\ a \cdot (-1)^3 + b \cdot (-1)^2 + c \cdot (-1) + d &= 4 \\ -a + b - c + d &= 4 \\ -a + b - c + 10 &= 4 \\ -a + b - c &= -6 \end{aligned}$$

3. „Sie hat einen Sattelpunkt bei $x = -1$“.

$$\begin{aligned} f'(-1) &= 0 \\ 3a \cdot (-1)^2 + 2b \cdot (-1) + c &= 0 \\ -3a + 2b - c &= 0 \end{aligned}$$

4. „Die Funktion hat eine Wendestelle bei $x = -1$."

$$\begin{aligned} f''(-1) &= 0 \\ 6a \cdot (-1) + 2b &= 0 \\ -6a + 2b &= 0 \end{aligned}$$

Die Gleichungen ergeben sich also wie folgt ($d = 0$):

$$\begin{array}{rcrcrcr} -a & + & b & - & c & = & -6 \\ -3a & + & 2b & - & c & = & 0 \\ -6a & + & 2b & & & = & 0 \end{array}$$

Die Lösung dieses Gleichungssystems ergibt:

$$a = 6, b = 18, c = 18$$

Die Funktionsgleichung lautet also:

$$f(x) = 6x^3 + 18x^2 + 18x + 10$$

Zum Schluss muss man noch überprüfen, ob wirklich eine Wendestelle bei $x = -1$ vorliegt:

$$f'''(-1) = 6 \cdot 6 \neq 0$$

Alle Bedingungen sind also erfüllt für die Funktion:

$$f(x) = 6x^3 + 18x^2 + 18x + 10$$

Zu Aufgabe: 15.5
Eine Funktion dritten Grades:

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

Da die Funktion punktsymmetrisch sein soll, müssen die Vorfaktoren b und d null sein:

$$\begin{aligned} f(x) &= ax^3 + cx \\ f'(x) &= 3ax^2 + c \\ f(2) &= -32 \\ f'(2) &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 8a + 2c &= -32 \\ 12a + c &= 0 \end{aligned}$$

$$f(x) = 2x^3 - 24$$

Zu Aufgabe: 15.6
Eine achsensymmetrische Funktion vierten Grades enthält keine ungeraden Exponenten:

$$\begin{aligned} f(x) &= ax^4 + bx^2 + c,\ a, b, c \in \mathbb{R} \\ f'(x) &= 4ax^3 + 2bx \\ f''(x) &= 12ax^2 + 2b \\ f'''(x) &= 24ax \end{aligned}$$

1. „Die Funktion enhält den Punkt $(0|5)$."

$$\begin{aligned} f(0) &= 5 \\ a \cdot 0^4 + b \cdot 0^2 + c &= 5 \\ c &= 5 \end{aligned}$$

2. „Sie hat einen Hoch**punkt** bei $x = 0$".
   Da die Funktion achsensymmetrisch ist, muss sie eine Extremstelle bei $x = 0$ haben.

   Dies ist also keine neue Information, die man benutzen könnte zur Bestimmung der Variablen. Dies erklärt auch, warum Sie eine Gleichung mehr haben als die Anzahl der Variablen.

3. „Sie hat ein Minimum = **Extremstelle** bei $x = 2$".

$$\begin{aligned} f'(2) &= 0 \\ 4a \cdot 2^3 + 2b \cdot 2 &= 0 \\ 32a + 4b &= 0 \end{aligned}$$

   Dass auch ein Minimum bei $x = -2$ vorliegt, ist durch die Achsensymmetrie klar und gibt keine neue Information.

4. „Die Funktion geht durch den Punkt $(1| - 16)$."

$$\begin{aligned} f(1) &= -16 \\ a \cdot 1^4 + b \cdot 1^2 + 5 &= -16 \\ a + b &= -21 \end{aligned}$$

Die Gleichungen ergeben sich also wie folgt ($d = 0$):

$$\begin{array}{rcrcr} 32a & + & 4b & = & 0 \\ a & + & b & = & -21 \end{array}$$

Die Lösung dieses Gleichungssystems ergibt:

$$a = 3, \qquad b = -24, \qquad c = 5$$

Die Funktionsgleichung lautet also:

$$f(x) = 3x^4 + -24x^2 + 5$$

Zum Schluss muss man noch überprüfen, ob wirklich ein Minimum bei $(x = 2)$ und ein Hochpunkt bei $(x = 0)$vorliegt:

1. Ist wirklich ein Minimum bei $x = 2$?

   $$f''(2) = 36 \cdot 2^2 - 48 > 0$$

   Dies bedeutet, dass bei $x = 2$ ein Minimum ist.

2. Ist wirklich ein Hochpunkt bei $x = 0$?

   $$f''(0) = 36 \cdot 0^2 - 48 < 0$$

   Dies bedeutet, dass bei $x = 0$ ein Hochpunkt ist.

Alle Bedingungen sind also erfüllt für die Funktion:

$$f(x) = 3x^4 + -24x^2 + 5$$

Kapitel 16

Funktionsscharen – Funktionen mit einem Parameter

Funktionenscharen entstehen durch Funktionsvorschriften, die auch noch einen weiteren Parameter enthalten, der verändert werden kann.

Beim Differenzieren wird dieser Parameter als Konstante angesehen und spielt so keine Rolle:

Beispiel:

$$f_k(x) = 3kx^2 + 2k^2x - k$$
$$f_k'(x) = 6kx + 2k^2$$

Diese Funktionsklasse ist deshalb wichtig, weil es die Hinführung zu dreidimensionalen Funktionen bildet.

Typische Aufgabenstellungen sind:

- die Extremstellen in Abhängigkeit von k zu bestimmen.
- die Ortskurve der Extremstellen zu bestimmen. D. h. die Kurve, auf der z. B. die Maxima liegen zu bestimmen.
- das k zu bestimmen, bei dem das Maximum am größten wird. (Dann muß man noch einmal nach k differenzieren.)

16.1 Ortskurven

Gegeben ist die Funktionenschar:

$$f_t(x) = tx^2 + 4x \qquad t > 0$$

Gesucht ist die Ortskurve der Minima.

$$f_t(x) = tx^2 + 4x \qquad t > 0$$
$$f_t'(x) = 2tx + 4$$
$$f_t''(x) = 2t > 0, \text{ laut Voraussetzung, da } t > 0 \text{ gilt}$$

Die Extremstellen sind:

$$\begin{aligned} f_t'(x) &= 0 \\ 2tx + 4 &= 0 \\ 2tx &= -4 \\ x &= \frac{-2}{t} \end{aligned}$$

Da die 2. Ableitung immer größer null ist, hat f_t an der Stelle $x = \frac{-2}{t}$ ein Minimum.

$$f_t\left(\frac{-2}{t}\right) = y_{\min} = t \cdot \left(\frac{-2}{t}\right)^2 + 4 \cdot \frac{-2}{t} = \frac{4}{t} - \frac{8}{t} = \frac{-4}{t}$$

Die Tiefpunkte sind:

$$\left(\frac{-2}{t}\middle|\frac{-4}{t}\right)$$

Auflösen von t nach x ergibt:

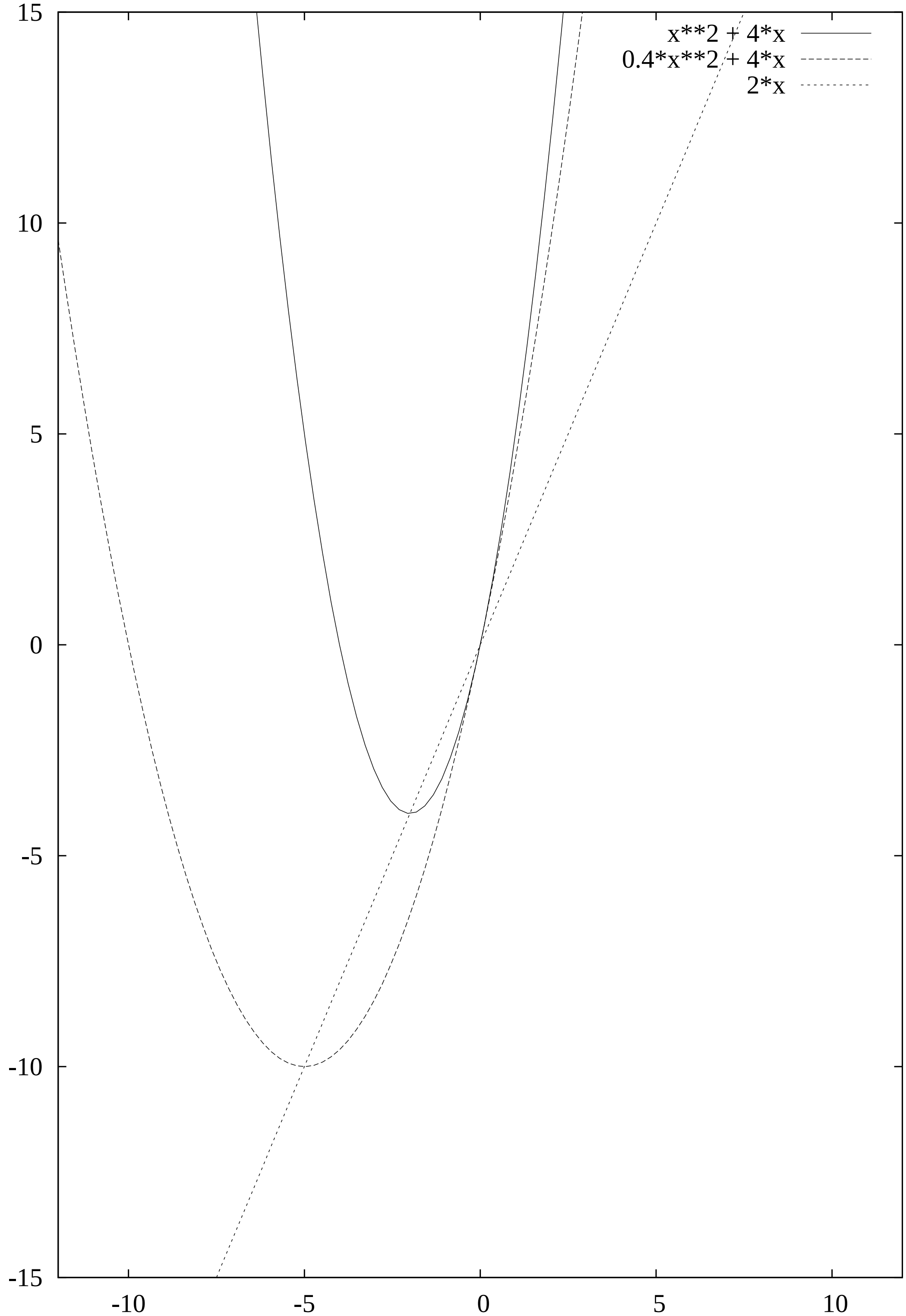
$$\begin{aligned} x &= \frac{-2}{t} \\ t &= \frac{-2}{x} \end{aligned}$$

Einsetzen von t in $y_{\min}$ ergibt:

$$y_{\min} = \frac{-4}{t} = \frac{-4}{\frac{-2}{x}} = -4 : \frac{-2}{x} = -4 \cdot \frac{x}{-2} = 2x$$

Die Ortskurve der Minima ergibt sich zu:

$$g(x) = 2x$$


x**2 + 4*x
0.4*x**2 + 4*x
2*x
15
10
5
0
-5
-10
-15
-10
-5
0
5
10

16.2 Aufgaben

Aufgabe 16.1

$$f_k(x) = x^4 - kx^2 \qquad k \in \mathbb{R}^+$$

1. Bestimmen Sie die Nullstellen von $f_k(x)$.
2. Untersuchen Sie $f_k(x)$ auf Symmetrie.
3. Bestimmen Sie die Extrempunkte von $f_k(x)$.
4. Bestimmen Sie den Graphen, auf dem alle Extrempunkte liegen (Ortskurve).

(Lösung siehe Seite 236).

Aufgabe 16.2

$$f_k(x) = x^3 + 6kx^2 - 15k^2x \qquad k \in \mathbb{R}^+$$

1. Bestimmen Sie die Nullstellen von $f_k(x)$.
2. Bestimmen Sie die Extrempunkte von $f_k(x)$.
3. Bestimmen Sie den Graphen, auf dem alle Maxima liegen (Ortskurve).

(Lösung siehe Seite 239).

Aufgabe 16.3

$$f_k(x) = x^3 - 12k^2x - 192k \qquad k \in \mathbb{R}^+$$

1. Untersuchen Sie $f_k(x)$ auf Symmetrie.
2. Bestimmen Sie die Ortskurve der Maxima.
3. Für welche k-Werte liegen die Maxima auf der x-Achse?
4. Bestimmen Sie den k-Wert, bei dem das Maximum minimal (relatives Minimum) wird.

(Lösung siehe Seite 242).

Aufgabe 16.4

Von einer Funktion dritten Grades $f_t(x)$ ist bekannt, dass sie bei $x = t$ und bei $x = 2t$ jeweils eine Nullstelle hat. Zusätzlich hat Sie bei $x = t$ eine Extremstelle. (Man hätte auch fordern können, dass die Funktion bei $x = t$ die x-Achse berührt.)

Weiterhin soll die Funktion durch den Punkt $(0|-2t^3)$ gehen. $t \neq 0$.

1. Bestimmen Sie die Funktion $f_t(x)$.
2. Bestimmen Sie alle Extrempunkte der Funktion $f_t(x)$.
3. Bestimmen Sie die Ortskurve für den weiteren Extrempunkt.

(Lösung siehe Seite 245).

16.3 Lösungen

Zu Aufgabe: 16.1

$$f_k(x) = x^4 - kx^2 \qquad k \in \mathbb{R}^+$$

1. Bestimmen Sie die Nullstellen von $f(x)$.

$$\begin{aligned} f_k(x) &= 0 \\ x^4 - kx^2 &= 0 \\ x^2(x^2 - k) &= 0 \end{aligned}$$

Ein Produkt ist null, wenn mindestens einer der Faktoren null ist:

1. Faktor	2. Faktor
$x = 0$	$(x^2 - k) = 0$
	$x^2 - k = 0$ $x^2 = k$ | laut Voraussetzung gilt: $k > 0$ $x = -\sqrt{k}$ od. $x = \sqrt{k}$

Nullstellen sind bei: $x_1 = 0$, $x_2 = -\sqrt{k}$ sowie $x_3 = \sqrt{k}$

2. Untersuchen Sie $f_k(x)$ auf Symmetrie.

   (a) Allgemeines Verfahren:

$$\begin{aligned} f_k(-x) &= (-x)^4 - k(-x)^2 \\ &= x^4 - kx^2 \\ &= f_k(x) \end{aligned}$$

   Es liegt Achsensymmetrie zur y-Achse vor.

   (b) Spezielles Verfahren bei ganzrationalen Funktionen:
   Da die Exponenten der Variablen „x" alle gerade sind (hier: 4 und 2), handelt es sich um eine zur y-Achse symmetrischen Funktion.

3. Bestimmen Sie die Extrempunkte von $f_k(x)$.

$$\begin{aligned} f_k(x) &= x^4 - kx^2 \\ f_k'(x) &= 4x^3 - 2kx \\ f_k''(x) &= 12x^2 - 2k \end{aligned}$$

   (a) notwendige Bedingung: $f_k'(x) = 0$

$$\begin{aligned} f_k'(x) &= 0 \\ 4x^3 - 2kx &= 0 \\ x(4x^2 - 2k) &= 0 \end{aligned}$$

i. Fall I: $x = 0$

ii. Fall II: $4x^2 - 2k = 0$

$$\begin{aligned} 4x^2 - 2k &= 0 \\ 4x^2 &= 2k \\ x^2 &= 0{,}5k \quad \mid \text{laut Voraussetzng gilt: } k > 0 \\ x = -\sqrt{(0{,}5k)} \quad &\text{od.} \quad x = \sqrt{(0{,}5k)} \end{aligned}$$

Alle möglichen Extremstellen sind bei $x_4 = 0$ und $x_{5/6} = \pm\sqrt{(0{,}5\,k)}$.

(b) hinreichende Bedingung: $f_k'(x_0) = 0$ und $f_k''(x_0) \neq 0$:

$$\begin{aligned} f_k'\left(-\sqrt{\frac{k}{2}}\right) &= 0 \text{ und} \\ f_k''\left(-\sqrt{\frac{k}{2}}\right) &= 12\left(-\sqrt{\frac{k}{2}}\right)^2 - 2k \\ &= 12 \cdot \frac{k}{2} - 2k \\ &= 6k - 2k \\ &= 4k \\ &> 0 \qquad \text{da } k > 0 \text{ lt. Voraussetzung} \\ f_k'\left(\sqrt{\frac{k}{2}}\right) &= 0 \text{ und} \\ f_k''\left(\sqrt{\frac{k}{2}}\right) &= 12\left(\sqrt{\frac{k}{2}}\right)^2 - 2k \\ &= 12 \cdot \frac{k}{2} - 2k \\ &= 6k - 2k \\ &= 4k \\ &> 0 \qquad \text{da } k > 0 \text{ lt. Voraussetzung} \\ f_k'(0) &= 0 \text{ und} \\ f_k''(0) &= 12(0)^2 - 2k \\ &= -2k \\ &< 0 \qquad \text{da } k > 0 \text{ lt. Voraussetzung} \end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned} f_k(0) &= 0 \\ f_k\left(\sqrt{\frac{k}{2}}\right) &= \left(\sqrt{\frac{k}{2}}\right)^4 - k\left(\sqrt{\frac{k}{2}}\right)^2 \\ &= \frac{k^2}{4} - k \cdot \frac{k}{2} \\ &= -\frac{k^2}{4} \end{aligned}$$

Aus Symmetriegründen ($f_k(x)$ ist achsensymmetrisch) gilt:

$$f_k\left(-\sqrt{\frac{k}{2}}\right) = -\frac{k^2}{4}$$

Es gibt einen Hochpunkt bei (0|0) und Tiefpunkte bei: $\left(\pm\sqrt{\frac{k}{2}}\middle|\frac{-k^2}{4}\right)$.

4. Bestimmen Sie den Graphen auf dem alle Extrempunkte liegen (Ortskurve).

   Die Extrempunkte sind bei (0|0) und $\left(\pm\sqrt{\frac{k}{2}}\middle|\frac{-k^2}{4}\right)$.

$$\begin{aligned} x &= \sqrt{\frac{k}{2}} \\ x^2 &= \frac{k}{2} \\ 2x^2 &= k \end{aligned}$$

   Für den y-Wert der Extrempunkte gilt: $y = \frac{-k^2}{4}$:

$$\begin{aligned} y &= \frac{-k^2}{4} \qquad \text{einsetzen von } 2x^2 \text{ für } k \\ &= \frac{-(2x^2)^2}{4} \\ &= \frac{-4x^4}{4} \\ &= -x^4 \end{aligned}$$

   Die Ortskurve lautet:

$$g(x) = -x^4$$

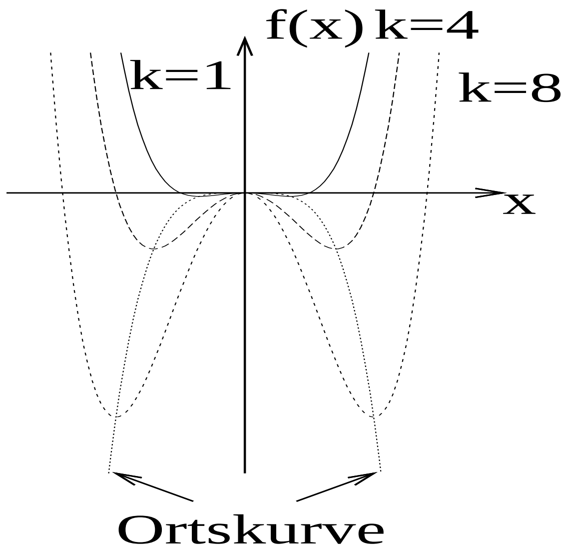


Abbildung 16.1: Die Funktionsscharen $f_k(x) = x^4 - kx^2$ sind exemplarisch für $k = 1$, $k = 4$ und $k = 8$ gezeichnet. Alle Tiefpunkte liegen auf der Ortskurve: $g(x) = -x^4$.

Zu Aufgabe: 16.2

$$f_k(x) = x^3 + 6kx^2 - 15k^2x \qquad k \in \mathbb{R}^+$$

1. Bestimmen Sie die Nullstellen von $f_k(x)$.

$$\begin{aligned} f_k(x) &= 0 \\ x^3 + 6kx^2 - 15k^2x &= 0 \\ x(x^2 + 6kx - 15k^2) &= 0 \end{aligned}$$

   (a) Fall I: $x = 0$

   (b) Fall II: $x^2 + 6kx - 15k^2 = 0$

$$\begin{array}{rcl} x^2 + 6kx - 15k^2 & = & 0 \\ x^2 + 6kx & = & 15k^2 \\ (x + 3k) & = & 15k^2 + 9k^2 \\ (x + 3k) & = & 24k^2 \qquad k > 0 \\ x + 3 = -\sqrt{24}\,k & \text{oder} & x + 3 = \sqrt{24}\,k \\ x = -3 - \sqrt{24}\,k & \text{oder} & x = -3 + \sqrt{24}\,k \end{array}$$

Nullstellen sind bei:

$$x_1 = -3 - \sqrt{24}\,k \qquad x = 0 \qquad x_2 = -3 + \sqrt{24}\,k$$

2. Bestimmen Sie die Extrempunkte von $f_k(x)$.

   (a) Ableitungen:

$$\begin{aligned} f_k(x) &= x^3 + 6kx^2 - 15k^2x \\ f_k'(x) &= 3x^2 + 12kx - 15k^2 \\ f_k''(x) &= 6x + 12k \end{aligned}$$

   (b) notwendige Bedingung: $f_k'(x) = 0$

$$\begin{aligned} f_k'(x) &= 0 \\ 3x^2 + 12kx - 15k^2 &= 0 \\ x^2 + 4k - 5k^2 &= 0 \\ x^2 + 4k &= 5k^2 \\ (x+2k)^2 &= 5k^2 + 4k^2 \\ (x+2k)^2 &= 9k^2 \qquad k > 0 \\ x + 2 = -3k &\vee x + 2 = 3k \\ x_3 = -5k &\vee x_4 = k \end{aligned}$$

   ($\vee$ = oder)

   $x_3 = -5k$ und $x_4 = k$ sind mögliche Extremstellen.

   (c) hinreichende Bedingung: $f_k'(x_0) = 0$ und $f_k''(x_0) \neq 0$

$$\begin{aligned} f_k'(-5k) &= 0 \text{ und} \\ f_k''(-5k) &= 6 \cdot (-5k) + 12k \\ &= -18k < 0 \qquad k > 0 \\ f_k'(k) &= 0 \text{ und} \\ f_k''(k) &= 6 \cdot (k) + 12k \\ &= 18k > 0 \qquad \text{da } k > 0 \end{aligned}$$

   An der Stelle $x = -5k$ ist ein Maximum.
   An der Stelle $x = k$ ist ein Minimum.

   (d) Bestimmen der Punkte

$$\begin{aligned} f_k(k) &= k^3 + 6kk^2 - 15k^2k \\ &= k^3 + 6k^3 - 15k^3 \\ &= -8k^3 \\ f_k(-5k) &= (-5k)^3 + 6k(-5k)^2 - 15k^2 \cdot (-5k) \\ &= -125k^3 + 150k^3 + 75k^2 \\ &= 100k^3 \end{aligned}$$

   Hochpunkt bei $(-5k|100k^3)$.
   Tiefpunkt bei $(k|-8k^3)$.

3. Bestimmen Sie den Graphen auf dem alle Maxima liegen (Ortskurve).

$$\begin{aligned} x &= -5k \\ \frac{-1}{5}x &= k \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g(x) &= 100k^3 \\ &= 100 \cdot \left(\frac{-x}{5}\right)^3 \\ &= 100 \cdot \frac{-1}{125}x^3 \\ &= -\frac{4}{5}x^3 \end{aligned}$$

Die Ortskurve der Tiefpunkte lautet:

$$g(x) = -\frac{4}{5}x^3$$

Zu Aufgabe: 16.3

$$f_k(x) = x^3 - 12k^2x - 192k \qquad k \in \mathbb{R}^+$$

1. **Untersuchen Sie $f_k(x)$ auf Symmetrie.**

$$\begin{aligned} f(-x) &= x^3 - 12k^2x - 192k \\ &= (-x)^3 - 12k^2(-x) - 192k \\ &= -x^3 + 12k^2x - 192k \\ &\neq f(x) \\ &\neq -f(x) \end{aligned}$$

   Es liegt keine Symmetrie vor.

2. **Bestimmen Sie die Ortskurve der Maxima.**
   Gesucht sind die Maxima / Extremwerte:

   (a) **Ableitungen**

$$\begin{aligned} f(x) &= x^3 - 12k^2x - 192k \\ f'(x) &= 3x^2 - 12k^2 \\ f''(x) &= 6x \end{aligned}$$

   (b) **notwendige Bedingung:** $f'(x) = 0$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 0 \\ 3x^2 - 12k^2 &= 0 \\ 3x^2 &= 12k^2 \\ x^2 &= 4k^2 \\ x &= -2k \vee 2k \end{aligned}$$

   ($\vee$ = oder)
   Bei $x_1 = -2k$ und $x_2 = 2k$ sind mögliche Extremstellen.

   (c) **hinreichende Bedingung:** $f'(x_0) = 0$ **und** $f''(x_0) \neq 0$

$$\begin{aligned} f'(2k) &= 0 \text{ und} \\ f''(2k) &= 6(2k) \\ &= 12k \\ &> 0 \quad \text{da } k > 0 \\ f'(-2k) &= 0 \text{ und} \\ f''(-2k) &= 6(-2k) \\ &= -12k \\ &< 0 \quad \text{da } k > 0 \end{aligned}$$

   Das Maximum ist bei $x = -2k$.

(d) **Punkte**

$$f(-2k) = (-2k)^3 - 12k^2(-2k) - 192k$$
$$f(-2k) = -2^3k^3 + 24k^3 - 192k$$
$$f(-2k) = -8k^3 + 24k^3 - 192k$$
$$f(-2k) = 16k^3 - 192k$$

Das Maximum ist jeweils bei $(-2k|16k^3 - 192k)$.

(e) **Ortskurve**

$$x = -2k$$
$$-\frac{x}{2} = k$$

$$y = 16k^3 - 192k$$
$$y = 16\left(-\frac{x}{2}\right)^3 - 192\left(-\frac{x}{2}\right)$$
$$y = 16(-1)^3\frac{x^3}{2^3} + 96x$$
$$y = -2x^3 + 96x$$

Die Ortskurve ist:
$$g(x) = -2x^3 + 96x$$

3. **Für welche k-Werte liegen die Maxima auf der x-Achse?**

$$y = 0$$
$$16k^3 - 192k = 0$$
$$16k(k^2 - 4) = 0$$

Lösungen sind: $k = 0$,
$k = -2$, $k = 2$.

4. Bestimmen Sie den k-Wert, bei dem das Maximum minimal (relatives Minimum) wird.
Das besondere an der Art der Aufgabenstellung ist, dass Sie jetzt nach k ableiten müssen.

(a) **Ableitungen**

$$h(k) = 16k^3 - 192k$$
$$h'(k) = 48k^2 - 192$$
$$h''(k) = 96k$$

(b) **notwendige Bedingung:** $h'(k) = 0$

$$\begin{array}{rcl} h'(k) & = & 0 \\ 48k^2 - 192 & = & 0 \\ 48k^2 & = & 192 \\ k^2 & = & 4 \\ k = -2 & \text{oder} & k = 2 \end{array}$$

Bei $k_1 = -2$ und $k_2 = 2$ sind mögliche Extremstellen.

(c) **hinreichende Bedingung:** $h'(k_0) = 0$ **und** $h''(k_0) \neq 0$

$$\begin{aligned} h'(-2) &= 0 \text{ und} \\ h''(-2) &= -192 < 0 \\ h'(-2) &= 0 \text{ und} \\ h''(2) &= 192 > 0 \end{aligned}$$

Bei $k_1 = 2$ ist ein Minimum, bei $k_2 = -2$ ist ein Maximum.

(d) **Punkte**

$$\begin{aligned} x &= -2 \cdot 2 \\ f_2(-4) &= (-4)^3 - 12 \cdot 2 \cdot (-4) - 192 \cdot 2 \\ f_2(-4) &= -352 \end{aligned}$$

Bei $(-4|-352)$ ist das relativ kleinste Maximum.
Das absolute kleinste Maximum ist bei $k \to \infty$ gegeben.

5. **Bild** siehe Abb. 16.2.

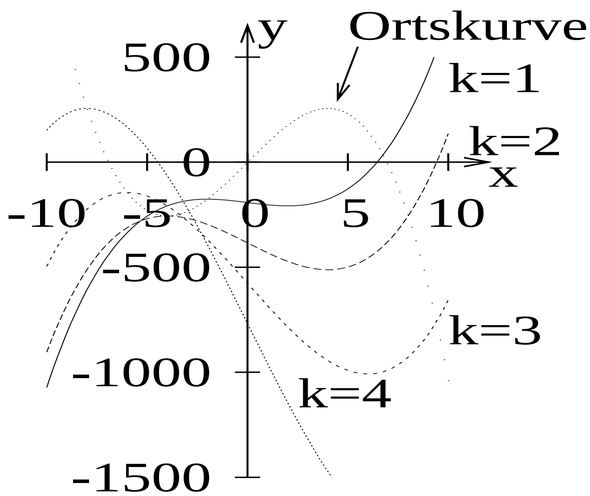


Abbildung 16.2: Die Funktionsscharen $f_k(x) = x^3 - 12k^2x - 192k$ sind exemplarisch für $k = 1$, $k = 2$, $k = 3$ und $k = 4$ gezeichnet. Alle Maxima liegen auf $g(x) = -2x^3 + 96x$.

Zu Aufgabe: 16.4 1. Bestimmen der Funktion:

Eine kubische Funktion ist vom Typ:

$$f_t(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

Es müssen noch die jeweiligen Vorfaktoren bestimmt werden. Sie können dies ausnahmsweise auf zwei verschiedenen Wegen durchführen.

(a) Als Produkt:
Da Sie bei $x = t$ eine Nullstelle haben, so kann man die Funktion auch schreiben als ein Produkt zweier Faktoren:

$$f_t(x) = (x - t) \cdot g(x)$$

Für den unbekannten Rest schreiben wir $g(x)$.
Die zweite Nullstelle ist bei $x = 2t$. Also muss in $f_t(x)$ der Faktor $(x - 2t)$ enthalten sein:

$$f_t(x) = (x - t)(x - 2t) \cdot g_2(x)$$

Bei $x = t$ haben Sie einen Berührpunkt an die x-Achse, also hat die Nullstelle einen geraden Grad. Die Nullstelle muss dann 2. Grades sein:

$$f_t(x) = (x - t)^2\,(x - 2t) \cdot g_3(x)$$

Ausmultipliziert ergibt sich:

$$f_t(x) = (x^3 - 4tx^2 + 5t^2 - 2t^3) \cdot g_3(x)$$

Jetzt fehlt nur noch der mögliche Vorfaktor. Dazu setzen wir jetzt den bekannten Wert für $x = 0$ ein:

$$f_t(0) = -2t^3 \cdot g_3(0)$$

Daraus ergibt sich, dass der Vorfaktor ($g_3(x)$) eins ist:

$$\begin{aligned} f_t(x) &= (x-t)^2\,(x-2t) \\ f_t(x) &= x^3 - 4tx^2 + 5t^2x - 2t^3 \end{aligned}$$

(b) Sie können auch ein Gleichungssystem für a, b, c und d aufstellen und dies lösen:

Die Bedingungen sind:

$$\begin{aligned} f_t(t) &= 0 \\ f_t'(t) &= 0 \\ f_t(0) &= -2t^3 \\ f_t(2t) &= 0 \end{aligned}$$

Daraus ergeben sich jeweils folgende Gleichungen:

$$\begin{aligned} at^3 + bt^2 + ct + d &= 0 \\ 3at^2 + 2bt + c &= 0 \\ d &= -2t^3 \\ 8at^3 + 4bt^2 + 2ct + d &= 0 \end{aligned}$$

Das d können Sie schon ersetzen, so dass Sie jeweils nur drei Unbekannte haben. Gleichzeitig werden alle Terme ohne a, b und c auf die rechte Seite gebracht:

$$\begin{aligned} at^3 + bt^2 + ct &= 2t^3 \\ 3at^2 + 2bt + c &= 0 \\ d &= -2t^3 \\ 8at^3 + 4bt^2 + 2ct &= 2t^3 \end{aligned}$$

Um a, b und c zu bestimmen, lösen wir mit dem Gaußverfahren (rechts steht die Prüfsumme = Summe aller Elemente der Zeile):

$$\begin{pmatrix} t^3 & t^2 & t \\ 3t^2 & 2t & 1 \\ 8t^3 & 4t^2 & 2t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2t^3 \\ 0 \\ 2t^3 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{|c} 3t^3 + t^2 + t \\ 3t^2 + 2t + 1 \\ 10t^3 + 4t^2 + 2t \end{array}$$

$II = t \cdot II - 3 \cdot I$
$III = III - 8 \cdot I$

$$\begin{pmatrix} t^3 & t^2 & t \\ 0 & -t^2 & -2t \\ 0 & -4t^2 & -6t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2t^3 \\ -6t^3 \\ -14t^3 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{|c} 3t^3 + t^2 + t \\ -6t^3 - t^2 - 2t \\ -14t^3 - 4t^2 - 6t \end{array}$$

$II = (-1) \cdot II$
$III = (-1) \cdot III$

$$\begin{pmatrix} t^3 & t^2 & t \\ 0 & t^2 & 2t \\ 0 & 4t^2 & 6t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2t^3 \\ 6t^3 \\ 14t^3 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{|c} 3t^3 + t^2 + t \\ 6t^3 + t^2 + 2t \\ 14t^3 + 4t^2 + 6t \end{array}$$

$III = III - 4 \cdot II$

$$\begin{pmatrix} t^3 & t^2 & t \\ 0 & t^2 & 2t \\ 0 & 0 & -2t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2t^3 \\ 6t^3 \\ -10t^3 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{|c} 3t^3 + t^2 + t \\ 6t^3 + t^2 + 2t \\ -10t^3 - 2t \end{array}$$

$III = III/(-2)$

$$\begin{pmatrix} t^3 & t^2 & t \\ 0 & t^2 & 2t \\ 0 & 0 & t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2t^3 \\ 6t^3 \\ 5t^3 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{|c} 3t^3 + t^2 + t \\ 6t^3 + t^2 + 2t \\ 5t^3 + t \end{array}$$

$I = I - III$
$II = II - 2 \cdot III$

$$\begin{pmatrix} t^3 & t^2 & 0 \\ 0 & t^2 & 0 \\ 0 & 0 & t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3t^3 \\ -4t^3 \\ 5t^3 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{|c} -2t^3 + t^2 \\ -4t^3 + t^2 \\ 5t^3 + t \end{array}$$

$I = I - II$

$$\begin{pmatrix} t^3 & 0 & 0 \\ 0 & t^2 & 0 \\ 0 & 0 & t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t^3 \\ -4t^3 \\ 5t^3 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{|c} 2t^3 \\ -4t^3 + t^2 \\ 5t^3 + t \end{array}$$

$I = I/t^3$
$II = II/t^2$
$III = III/t$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4t \\ 5t^2 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{|c} 2 \\ -4t + 1 \\ 5t^2 + 1 \end{array}$$

Auch hier ergibt sich die Funktion zu:

$$f_t(x) = x^3 - 4tx^2 + 5t^2x - 2t^3$$

2. Bestimmen Sie alle Extremstellen der Funktion $f_t(x)$.

$$\begin{aligned}
f_t(x) &= x^3 - 4tx^2 + 5t^2x - 2t^3 \\
f_t'(x) &= 3x^2 - 8tx + 5t^2 \\
f_t''(x) &= 6x - 8t
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_t'(x) &= 0 \\
3x^2 - 8tx + 5t^2 &= 0 \\
x^2 - \frac{8}{3}tx + \frac{5}{3}t^2 &= 0 \\
x^2 - \frac{8}{3}tx &= -\frac{5}{3}t^2 \\
(x - \frac{4}{3}t)^2 &= -\frac{5}{3}t^2 + \frac{16}{9}t^2 \\
(x - \frac{4}{3}t)^2 &= \frac{1}{9}t^2 \\
x - \frac{4}{3}t &= \pm\frac{1}{3}t \\
x = t \text{ oder } x &= \frac{5}{3}t
\end{aligned}$$

Einsetzen in die 2. Ableitung ergibt:

$$\begin{aligned}
f_t''(t) &= 6t - 8t = -2t \\
f_t''(\frac{5}{3}t) &= 6\frac{5}{3}t - 8t = 2t
\end{aligned}$$

Es liegt bei $x = t$ ein Maximum vor, wenn $t > 0$ ist.
Es liegt bei $x = t$ ein Minimum vor, wenn $t < 0$ ist.
Es liegt bei $x = \frac{5}{3}t$ ein Minimum vor, wenn $t > 0$ ist.
Es liegt bei $x = \frac{5}{3}t$ ein Maximum vor, wenn $t < 0$ ist.

$$f_t(t) = 0$$

$$\begin{aligned}
f_t(\frac{5}{3}t) &= \frac{125}{27}t^3 - 4t\frac{25}{9}t^2 + 5t^2\frac{5}{3}t - 2t^3 \\
f_t(\frac{5}{3}t) &= \frac{125}{27}t^3 - \frac{100}{9}t^3 + \frac{25}{3}t^3 - 2t^3 \\
f_t(\frac{5}{3}t) &= -\frac{4}{27}t^3
\end{aligned}$$

Die Extrempunkte lauten: $(0|t)$ und $\left(\frac{5}{3}t| - \frac{4}{27}t^3\right)$.

3.

$$
\begin{aligned}
x &= \frac{5}{3}t \\
\frac{3}{5}x &= t \\
y &= -\frac{4}{27}t^3 \\
&= -\frac{4}{27} \cdot \left(\frac{3}{5}x\right)^3 \\
&= -\frac{4}{27} \cdot \frac{27}{125}x^3 \\
&= \frac{-4}{125}x^3
\end{aligned}
$$

Die Ortskurve lautet:

$$k(x) = \frac{-4}{125}x^3$$

Kapitel 17

Symmetrie

In der Schule wird immer nur die Achsensymmetrie zur y-Achse und die Punktsymmetrie zum Ursprung untersucht. Wenn man eine Achsensymmetrie zu einer anderen Achse oder eine Punktsymmetrie zu einem anderen Punkt untersuchen will, muss man zuerst die Funktion verschieben.

Symmetrieeigenschaften sind ebenfalls bei den Steckbriefaufgaben wichtig, denn ein Ergebnis wird sein, dass achsensymmetrische Polynome nur gerade Exponenten und punktsymmetrische Polynome nur ungerade Exponenten haben.

Beispiel für eine achsensymmetrische Funktion:

$$f(x) = 3x^4 - 2x^2 + 4$$

Beispiel für eine punktsymmetrische Funktion:

$$f(x) = 3x^3 - 2x$$

Merkregel:

- $f(x)$ ist achsensymmetrisch:
  - $f'(x)$ ist punktsymmetrisch.
  - $f(x)$ hat bei $x = 0$ eine Extremstelle.
- $f(x)$ ist punktsymmetrisch.
  - $f'(x)$ ist achsensymmetrisch.
  - $f(x)$ hat bei $(0|0)$ eine Wendestelle.

17.1 Achsensymmetrie

Wenn das Bild um die y-Achse gespiegelt ist, dann ist die Funktion achsensymmetrisch um die y-Achse.

Wenn ein Punkt (3|5) ein Punkt des Graphen ist, dann ist es auch (-3|5).

Oder in Formeln:

$$f(x) = f(-x)$$

Man nennt solche Funktionen auch „gerade“. Denn alle Funktionen, bei denen die x-Werte nur gerade Exponenten enthalten sind achsensymmetrisch.

Beispiel:

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 + 4 \\ f(-x) &= (-x)^2 + 4 \\ &= x^2 + 4 \\ &= f(x) \end{aligned}$$

17.2 Punktsymmetrie

Wenn das Bild um den Ursprung gespiegelt ist, dann ist die Funktion punktsymmetrisch um den Ursprung.

Wenn ein Punkt (3|5) ein Punkt des Graphen ist, dann ist es auch (-3|-5).

Oder in Formeln:

$$-f(x) = f(-x)$$

bzw.:

$$f(x) = -f(-x)$$

Man nennt solche Funktionen auch „ungerade“. Denn alle Funktionen, bei denen die x-Werte nur ungerade Exponenten enthalten sind punktsymmetrisch.

Beispiel:

$$\begin{aligned} f(x) &= x^5 + 3x^3 + 2x \\ f(-x) &= (-x)^5 + (-3x)^3 + 2(-x) \\ &= -x^5 - 3x^3 - 2x \\ &= (-1)(x^5 + 3x^3 + 2x) \\ &= -f(x) \end{aligned}$$

Eine zum Ursprung punktsymmetrische Funktion muss den Ursprung (0|0) enthalten.

17.3 Symmetrie an der Ursprungsgeraden

Spiegeln an der Ursprungsgeraden ($y = x$, oder die Winkelhalbierende des 1.Quadranten) ist gerade das geometrische Gegenstück zum Bilden der Umkehrfunktion.

In beiden Fällen wird im Prinzip die x-Achse mit der y-Achse getauscht.

Beispiele:

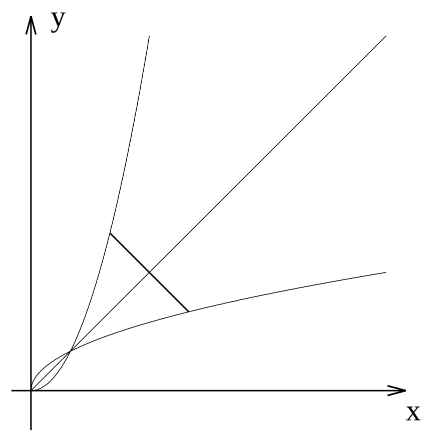


Abbildung 17.1: $f(x) = x^2, x \geq 0$ und die dazugehörige Umkehrfunktion: $f^{-1} = \sqrt{x}$
Für ein Beispiel ist gezeigt, wie die Punkte der Umkehrfunktion entstehen. (Erklärung im Text).

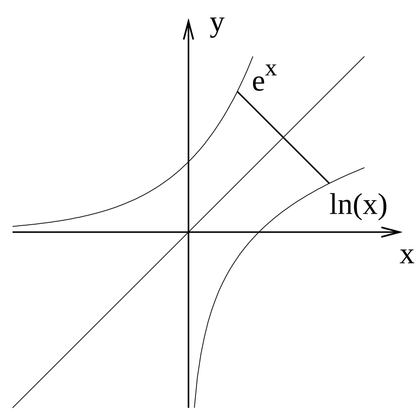


Abbildung 17.2: $f(x) = e^x$ und die dazugehörige Umkehrfunktion:
$f^{-1} = \ln(x)$
e ist die Eulersche Zahl: $e = 2{,}7...$ ln ist der Logarithmus zur Basis e.

Die Punkte der Umkehrfunktion entstehen geometrisch, wenn man von einem Punkt seiner Funktion eine Senkrechte auf die Winkelhalbierende zeichnet und diese Strecke um dieselbe Länge weiterzeichnet (siehe Abb. 17.1 und Abb. 17.2).

Mathematisch wird die Umkehrfunktion in zwei Schritten gebildet:

$$f(x) = 4x + 8$$

1. Die Funktion schreiben als $y = ...$ und auflösen nach x:

$$\begin{aligned} y &= 4x + 8 \\ y - 8 &= 4x \\ 0.25y - 2 &= x \end{aligned}$$

2. Jedes y durch x ersetzen und das x durch y ersetzen.

$$y = 0.25x - 2$$

Dies ist die gesuchte Umkehrfunktion.

17.4 Beispiele

$$f(x) = 2x^3 + 12x^2 + x$$

1. Spiegeln der Funktion an der y-Achse:
   Ersetzen Sie jedes x durch $-x$:

   $$g(x) = -2x^3 + 12x^2 - x$$

2. Spiegeln der Funktion an der x-Achse:
   Multiplizieren der Funkton mit (-1):

   $$h(x) = -2x^3 - 12x^2 - x$$

3. Punktspiegeln der Funktion an dem Ursprung:
   Ersetzen Sie jedes x durch $-x$ **und** multiplizieren der Funkton mit (-1):

   $$k(x) = (-1)g(x) = 2x^3 - 12x^2 + x$$

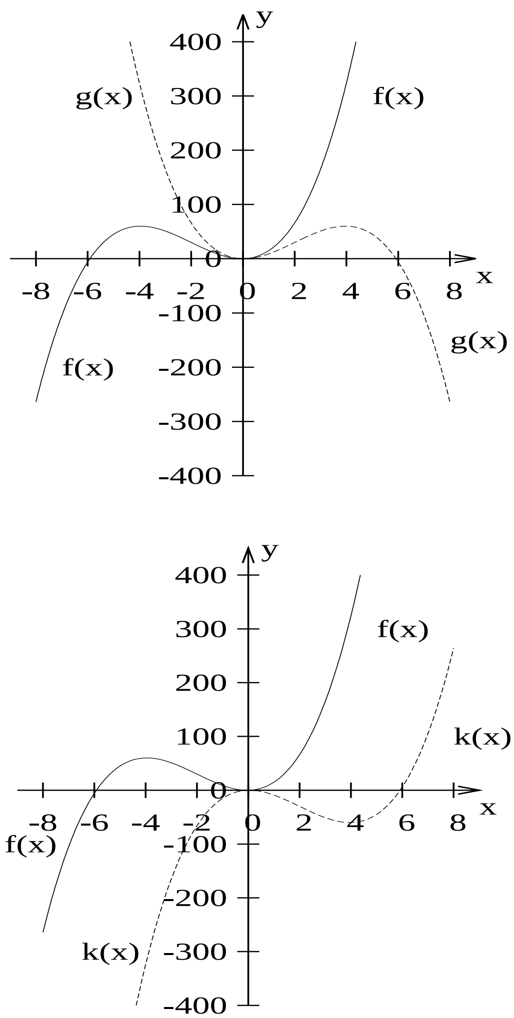


Abbildung 17.3: Jeweils Originalfunktion mit an der y-Achse gespiegelter Funktion, an der x-Achse gespiegelter Funktion und punktgespiegelter Funktion.